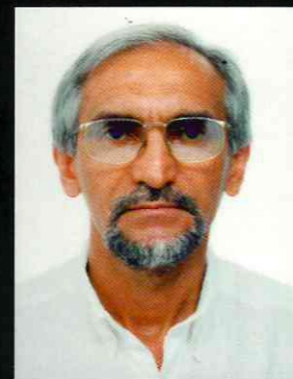


Sebastião Carneiro de Almeida

Análise Matemática

Princípios e Aplicações na Economia



Sebastião Carneiro de Almeida

é Bacharel e Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Posteriormente foi bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPq na University of California, Berkeley of e na State University of New York at Stony Brook tendo obtido o grau de PhD em Matemática no ano de 1983.

Foi Professor Titular do Departamento de Matemática e atualmente é Professor Adjunto do Departamento de Economia Aplicada da UFC onde leciona Economia Matemática no Curso de Pós-Graduação em Economia - CAEN.

Prefácio

Este texto baseia-se nas notas de aulas da disciplina de Economia Matemática lecionada na Universidade Federal do Ceará. Esta disciplina tem sido ofertada para alunos iniciando estudos de pós-graduação. O material apresentado é de conhecimento comum da comunidade acadêmica e objeto de vários trabalhos por parte dessa.

O texto procura ilustrar com exemplos as aplicações da Matemática aos diferentes tópicos da Economia. A seguir descrevemos os tópicos de Matemática tratados em cada capítulo.

No capítulo 1 introduzimos as noções e propriedades básicas que serão utilizadas nos capítulos subsequentes. Neste capítulo, fazemos uma breve revisão das noções de conjunto, relação, função, conjunto enumerável e conjunto não-enumerável. O capítulo 2 inicia com o estudo das funções afins. A seguir fazemos um estudo das funções quadráticas e cúbicas e finalizamos o capítulo com uma seção de exemplos de funções usadas em economia. No capítulo 3 apresentamos as noções de seqüências e série de números reais. O capítulo 4 é uma breve introdução à topologia dos espaços métricos. Estes espaços são dotados de uma estrutura específica que permite a introdução de conceitos como limite e continuidade. Em um espaço métrico X , proximidade e vizinhança são estudadas a partir da noção de distância entre pontos de X . Para uma melhor compreensão dos conceitos apresentados neste capítulo, o leitor poderá, em uma primeira leitura, se restringir ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n com a sua métrica euclidiana usual. Nos capítulos 5 e 6 introduzimos as noções de limite e derivada. O capítulo 7 trata da noção de integral. Iniciamos o capítulo 8 tratando da convergência de seqüências de funções. Em particular discutimos a convergência das séries de funções e mais particularmente das séries de potências. O capítulo 9 trata das funções de várias variáveis. Os fatos mais relevantes do cálculo de uma variável serão utilizados livremente neste capítulo e muitos possuem uma generalização natural. No capítulo 10 tratamos das funções convexas. Os capítulos 11 e 12 têm como propósito apresentar o Teorema da Função Implícita, o problema de Lagrange e as condições de Khun-Tucker. Nos capítulos 13 e 14 apresentamos a noção de integral de uma função real de n variáveis e o teorema de Stokes para uma variedade diferenciável. No capítulo 15 a apresentação é centralizada em torno do teorema do ponto fixo de Brouwer e do teorema do ponto fixo para contrações. Além disso fazemos algumas considerações adicionais sobre o teorema de Kakutane e outros resultados importantes para as aplicações em economia. O capítulo 16 trata dos sistemas de equações diferenciais ordinárias. Este é um ramo importante da Matemática e por si só mereceria um texto à parte. Discutiremos os

PREFÁCIO

teoremas de Picard e Peano sobre existência e unicidade dos sistemas de equações diferenciais e a existência de soluções máximas. Atenção especial é dada aos sistemas de equações lineares com coeficientes constantes e em particular aos sistemas bidimensionais simples e aos espaços de fase desses sistemas bidimensionais. O apêndice A é uma breve revisão de Álgebra Linear. Nos apêndices B e C fazemos uma rápida apresentação das funções trigonométricas e discutimos algumas das propriedades mais básicas dos números complexos. Alguns tópicos importantes, como equações em diferenças e otimização dinâmica serão discutidos em um segundo volume.

Ainda que não resolvidos, é essencial que o leitor faça pelo menos uma leitura dos exercícios propostos, já que boa parte do valor instrutivo do texto foi colocada nestes exercícios. Algumas limitações técnicas em um texto elementar não nos permitiram apresentar demonstrações de alguns resultados que foram enunciados para não privar o leitor da utilização destes em futuras aplicações.

Os erros tipográficos ficaram para o deleite de uns poucos aficionados e os demais são de minha inteira responsabilidade.

Gostaria de agradecer aos alunos que mesmo sem se aperceberem, muito influenciaram na escolha e modo de apresentação dos tópicos que foram aqui discutidos.

Desejamos finalmente agradecer aos colegas da Universidade Federal do Ceará por proporcionar o incentivo e ambiente indispensáveis ao trabalho científico.

Fortaleza, 11 de dezembro de 2006.

Sebastião Carneiro de Almeida
Departamento de Economia Aplicada - CAEN
FEAAC - UFC

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES	1
1. Álgebra dos conjuntos	1
2. Relações de equivalência e ordem	3
3. Funções, famílias e o axioma da escolha	5
4. Números reais	6
5. Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis	8
6. Exercícios	10
CAPÍTULO 2. FUNÇÕES UTILIZADAS EM ECONOMIA	13
1. Funções afins	14
2. Funções quadráticas	15
3. Polinômios do terceiro grau	16
4. Oferta, demanda, receita, custo e lucro	17
5. Exercícios	20
CAPÍTULO 3. SEQUÊNCIAS E SÉRIES	23
1. Sequências de números reais	23
2. Séries convergentes	25
3. Exercícios	29
CAPÍTULO 4. TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS	31
1. Espaços métricos	31
2. Um exemplo especial: O espaço euclidiano n -dimensional	32
3. Interior, fronteira e vizinhança	33
4. Espaços métricos completos. Pontos fixos de contrações	35
5. Propriedades das sequências em \mathbb{R}^m	37
6. Funções contínuas.	38
7. Espaços métricos conexos	41
8. Espaços métricos compactos	43
9. Exercícios	47
CAPÍTULO 5. LIMITES	49
1. Definição e propriedades	49
2. Limites laterais.	52
3. Outros limites	53
4. Exercícios.	55

CONTEÚDO

CAPÍTULO 6. CÁLCULO DIFERENCIAL. REVISÃO E APLICAÇÕES	57
1. A derivada de uma função real de variável real	57
2. Interpretação geométrica da derivada	59
3. Derivadas laterais	59
4. A noção de elasticidade	60
5. Máximos e mínimos locais. Teorema do valor médio	61
6. Monotonicidade e concavidade de uma função	64
7. Máximos e mínimos locais de uma função n vezes derivável	67
8. Regra de L'Hôpital	69
9. Aplicações à análise marginal	70
10. Exercícios	73
CAPÍTULO 7. INTEGRAÇÃO DE UMA FUNÇÃO REAL	77
1. Funções integráveis	78
2. Propriedades da integral	80
3. Teoremas clássicos	82
4. Funções logaritmo e exponencial	84
5. Partições pontilhadas	86
6. Aplicações da Integral em Economia	86
7. Exercícios	88
CAPÍTULO 8. SÉRIES DE FUNÇÕES	91
1. Convergência de uma seqüência de funções	91
2. Séries	93
3. Séries de potências	94
4. Exercícios	99
CAPÍTULO 9. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS	101
1. Funções diferenciáveis.	101
2. Derivadas parciais e direcionais de uma função real	103
3. Desigualdade do valor médio	105
4. Teorema de Schwarz para funções reais de várias variáveis	106
5. Funções homogêneas em Economia	107
6. Formas quadráticas em \mathbb{R}^n	109
7. Gráficos e superfícies de nível de uma função	113
8. Máximos e mínimos locais de uma função de várias variáveis	116
9. Monopólio com discriminação de preços	117
10. Exercícios	118
CAPÍTULO 10. A NOÇÃO DE CONVEXIDADE	123
1. Conjuntos convexos. Teoremas de separação	123
2. Funções convexas	124
3. Exercícios	130
CAPÍTULO 11. O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA	131
1. Exemplos	132
2. Aplicações	134
3. Exercícios	136

CAPÍTULO 12. OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA	137
1. Multiplicadores de Lagrange e as condições de Khun-Tucker	137
2. Hessiano aumentado	139
3. Uma aplicação da teoria do consumidor	142
4. O teorema de Kuhn-Tucker para domínios convexos.	143
5. Exercícios	144
CAPÍTULO 13. INTEGRAÇÃO NO \mathbb{R}^n	145
1. Propriedades da integral	147
2. Integral repetida e mudança de variáveis	148
3. Exercícios.	154
CAPÍTULO 14. TEOREMA DE STOKES	155
1. Integração em uma variedade diferenciável	160
2. Diferenciação exterior e o Teorema de Stokes	162
3. Exercícios.	164
CAPÍTULO 15. PONTOS FIXOS DE APLICAÇÕES	165
1. Prova do teorema do ponto fixo de Brouwer	167
2. Prova do teorema do ponto fixo para contrações.	170
3. O critério de Blackwell	170
4. Comentários adicionais sobre o Teorema de Kakutani	171
5. Exercícios	172
CAPÍTULO 16. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	173
1. Definições e exemplos	173
2. Existência e unicidade de soluções	176
3. Equações diferenciais lineares	178
4. Equações lineares com coeficientes constantes	179
5. Sistemas bidimensionais simples	181
6. Equação linear de ordem superior	185
7. Aplicações	187
8. Exercícios	190
Appendix A. REVISÃO DE ÁLGEBRA LINEAR	193
1. Matrizes	193
2. Determinante de uma matriz quadrada	194
3. Sistema linear de m equações e n incógnitas	198
4. Espaços vetoriais	199
5. Aplicações lineares	202
6. Aplicações elementares da álgebra linear	206
7. Exercícios	209
Appendix B. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	211
1. Definições e propriedades básicas	211
2. Exercícios	214
Appendix C. NÚMEROS COMPLEXOS	215
1. Norma e conjugado de um número complexo	217
2. Representação polar e raízes	218
3. Exercícios.	221
Appendix. Referências	223

O título, *Análise Matemática, Princípios e Aplicações na Economia*, faz jus a seu conteúdo. O autor consegue, em pouco mais de 200 páginas, abordar, com todo o rigor matemático, os tópicos básicos e mais nobres da análise matemática exibindo aplicações finas à teoria econômica especialmente à microeconomia. O texto é muito abrangente do ponto de vista matemático e rico em instigantes exercícios que, certamente, levarão os leitores mais críticos ao trabalho e ao desafio. Resumindo, trata-se de excelente texto de matemática avançada provida de interessantes aplicações.

Fabiano Brito
Professor Titular do IMEUSP.

Análise Matemática, Princípios e Aplicações na Economia é um livro indispensável para os economistas que desejam um rigoroso conhecimento de métodos quantitativos, notadamente àqueles que ingressam nos cursos de mestrado e doutorado. A sólida formação acadêmica do autor e a sua larga experiência de ensino nos cursos de graduação e pós-graduação, nos campos da matemática e da economia matemática, ensejaram uma obra de análise matemática com o conteúdo abrangente, em linguagem objetiva e apresentada com o necessário rigor teórico. O autor aborda ainda várias aplicações da análise matemática aos problemas da economia, tornando o livro uma importante referência no campo da moderna economia matemática.

Almir Bittencourt
Professor Associado da FEAAC/UFC

No epílogo de uma de suas magistras correspondências o Pe. Vieira desculpa-se com fina ironia, por não ter tido tempo de ser breve. O Prof. Sebastião Carneiro, com sua larga experiência docente em matemática, parece ter resolvido com este livro o dilema posto por Vieira – ter tempo de ser breve. Brevidade que não sacrifica o rigor, concisão que não tolhe a elegância. Assim, os tópicos complexos para o aluno médio de economia, como topologia, teoremas de ponto fixo e otimização sob restrições, são apresentados de forma leve e precisa. Sem dúvida este livro será extremamente benéfico para a formação dos nossos estudantes.

Ivan Castelar
Professor Titular de Econometria do DEA/UFC.

Os fenômenos econômicos vêm se tornando, ao longo do tempo, mais complexos, apresentando características cada vez mais multidisciplinares. Essa tendência vem exigindo dos analistas e pesquisadores na área de economia a utilização de novas técnicas matemáticas que possibilitem uma maior capacidade de aferição dos problemas investigados. Nesse sentido, o livro *Análise Matemática: Princípios e Aplicações na Economia* é de grande importância na medida em que apresenta de forma organizada, clara e consistente os fundamentos da análise matemática imprescindíveis na formação do economista e no melhor entendimento dos fatos por ele estudado.

Flávio Ataliba
Prof. Associado do DEA/UFC

