POLÍTICA FISCAL DE GASTOS REAIS CONSTANTES E SUAS CONSEQUÊNCIAS SOB O REGIME DE SUPERÁVIT PRIMÁRIO

Mauricio Benegas[1]
Emerson L.L. Marinho[2]

Resumo

Este trabalho utiliza um modelo dinâmico de equilíbrio geral para avaliar os impactos econômicos e sociais de uma combinação de políticas de austeridade fiscal. Especificamente, considerando um modelo do tipo agente-representativo em tempo contínuo, admite-se um governo que adota uma política de austeridade em que o gasto público real é mantido constante e adicionalmente a autoridade fiscal adota um regime de poupança pública de modo a manter um superávit primário como proporção do PIB. O modelo avalia o impacto de mudanças na composição orçamentária do gasto e no montante de poupança pública sobre o consumo, emprego, investimento e produto no equilíbrio de curto e longo prazos. Adicionalmente o modelo avalia o impacto dos parâmetros acima sobre a estrutura a termo da taxa de juros e sobre o bem estar social. Entre os resultados obtidos mostra-se que, dada uma política de gastos reais constantes, quanto maior a proporção do PIB destinada ao superávit primário piores são os resultados no curto prazo. Entretanto no longo prazo observa-se um aumento do consumo, investimento e produto. Ademais mostra-se que um aumento no gasto público em infraestrutura, seja antecipado ou não, reduz a taxa de juros de longo prazo. Por fim, mostra-se que, sob certas condições, o bem –estar social é maximizado quando a maior parte do orçamento público é alocado em investimento.

Palavras-chave: equilíbrio geral, austeridade fiscal, estrutura a termo da taxa de juros, bem estar.
JEL: E21, E43, E62, H62

---

[1] Professor do Curso de Pós-graduação em Economia (CAEN) e do Departamento de Teoria Econômica da UFC.
[2] Professor do Curso de Pós Graduação em Economia (CAEN) e do Curso de Finanças da UFC.

1. INTRODUÇÂO

Nestes últimos anos o Brasil vem enfrentando uma das piores recessões desde a época em que o Produto Interno Bruto (PIB) passou a ser contabilizado no ano de 1901. Aliado a esse problema, o déficit orçamentário do governo apresenta uma trajetória de desequilíbrio ao longo do tempo de maneira que, se medidas urgentes não forem adotadas o país poderá enfrentar sérias dificuldades para financiar seu déficit com consequências desastrosas para o país.

Neste sentido, as autoridades fiscais do atual governo têm anunciado que pretendem adotar uma política de gastos públicos reais constantes para os próximos anos. Em outras palavras, o gasto nominal de um determinado ano será no máximo igual ao gasto do ano anterior acrescido da taxa de inflação desse período. Adicionalmente, supõe-se que o governo pretenda adotar um regime de superávit primário como proporção do PIB. Embora esta última política não seja ainda um objetivo das autoridades fiscais do país, a mesma é incluída no modelo com objetivo de mostrar que as dinâmicas dos ajustes para o novo equilíbrio de longo prazo se dão de maneira mais rápidas.

Em vista dessas dificuldades, este artigo tem como objetivo principal analisar quais as consequências dessas políticas sobre as trajetórias de equilíbrio no curto e longo prazo do consumo, investimento, oferta de trabalho, produto e como se comporta a estrutura a termo da taxa de juros. Em relação a esta última, sua análise é de suma importância em função da estrutura a termo ser um importante mecanismo de transmissão de políticas macroeconômicas.

Vários artigos nessa literatura têm abordado as implicações de políticas fiscais sobre a estrutura a termos da taxa de juros. Utilizando a abordagem tradicional de modelos IS-LM com algumas variantes, podem-se citar os trabalhos de Blanchard (1981), Turnovsky e Miller (1984), McCafferty (1986). Em outro contexto que considera o comportamento de otimização intertemporal de um agente representativo podem-se citar os artigos de Cox, Ingersoll a Ross (1985) e Fisher e Turnosvky (1992).

Este artigo se baseia no modelo de Fisher e Turnosvky (1992) com duas principais modificações. A primeira considera que os gastos reais do governo são constantes ao longo do tempo. A segunda supõe que o regime fiscal adotado pelo governo é o de superávit primário como proporção do PIB. Nesse modelo o agente representativo maximiza intertemporalmente sua função utilidade com perfeita previsão e vida infinita respeitando as restrições econômicas.

Desde que se admite que os ativos financeiros nos portifólios possam ser ajustados instantaneamente e sem custo, a trajetória real da economia independe da taxa de longo prazo. Por sua vez, o equilíbrio de curto prazo determina a taxa de juros de curto prazo. Como consequência a taxa de juros de longo prazo é determinada via uma relação de arbitragem entre as duas. Em assim sendo, a taxa de juros de curto prazo responde de imediato a “choques” de política fiscal enquanto a taxa de longo prazo responde indiretamente via os efeitos das expectativas corrente e futuras das taxas de curto prazo.

Nestes termos, dois tipos de choques de políticas fiscais serão considerados: o primeiro é um choque permanente não antecipado pelos agentes, ou seja, o choque fiscal se dá de imediato; o segundo é um choque permanente antecipado no futuro. Neste último, o governo anuncia que alterará a política fiscal em uma data futura. Além de se considerar que os gastos reais do governo se manterão constantes ao longo do tempo, duas medidas de políticas fiscais serão analisadas: a primeira investiga como mudanças na composição dos gastos públicos (se o governo gasta mais em custeio ou em infraestrutura) afetam as trajetórias de investimento, consumo, produto, oferta de trabalho e taxas de juro de curto e longo prazo. Idem se o governo aumenta o superávit primário como proporção do PIB.

Por fim, o trabalho inclui uma discussão sobre a relação entre política fiscal e bem-estar social. A fim de obter resultados objetivos, algumas especificações foram feitas no modelo. Especificamente, é suposto que a utilidade do agente representativo segue a especificação sugerida em Christiano, Eichenbaum, and Rebelo (2011) e que a tecnologia é dada por uma forma Cobb-Douglas com gastos públicos produtivos, tal como sugerido em Barro (1990). Com tais especificações, foram encontradas as políticas de austeridade fiscal e de composição orçamentária que maximizam o bem-estar social, medido, no presente trabalho, como a utilidade total descontada. É demonstrado que, sob condições razoáveis, a composição orçamentária que maximiza o bem-estar deve alocar a maior parte dos recursos em infraestrutura e que a proporção do produto destinado ao superávit primário depende do quanto a renda *per capita* da é sensível aos resultados fiscais da economia.

No que se segue, além desta introdução o artigo está distribuído da seguinte maneira: a Seção 2 apresenta e discute o modelo teórico utilizado. A Seção 3 analisa a dinâmica transacional de equilíbrios quando o governo anuncia mudanças na composição orçamentária de seus gastos e aumenta o superávit primário como proporção do PIB. A quarta seção discute os impactos dessas políticas fiscais sobre a estrutura a termo da taxa de juros. A Seção 5 apresenta algumas conclusões sobre o bem-estar dos agentes quando o governo altera a composição de seus gastos e aumenta o seu superávit primário como proporção do PIB. A última seção apresenta e discute as conclusões finais. Adicionalmente, tem-se um apêndice onde se demonstra formalmente a solução do modelo e algumas passagens algébricas para a obtenção dos resultados.

2. **O MODELO**

O modelo considera uma economia fechada em que os agentes idênticos com vida infinita tomam decisões instantâneas sobre o consumo, $c(t)$, e trabalho, $l(t)$, de maneira a maximiza intertemporalmente os fluxos futuros de utilidade $U(c(t), l(t), g_c(t))$ descontados a uma taxa ρ. O termo $g_c(t)$ representa os gastos em custeio do governo. A função utilidade instantânea do agente é definida na forma aditiva como:

$$u(c(t), l(t)) + v(g_c(t))$$

em que, u e, v são funções estritamente côncavas com as seguintes propriedades: $u_c > 0,\ u_{cc} < 0,\ u_l < 0,\ u_{ll} < 0,\ v' > 0$ e $v'' < 0$.

Seguindo Barro (1991) a função de produção será definida na forma multiplicativa como:

$$y(t) = f(k(t), l(t))h(g_i(t))$$

onde, $y(t)$, $k(t)$ é o estoque de capital físico, $l(t)$ é a oferta de trabalho e $g_i(t)$ é o gasto em infraestrutura do governo. A função de produção é do tipo neoclássica com as seguintes propriedades: f é linearmente homogênea com $f_k > 0$, $f_l > 0$, $f_{ll} < 0$, $f_{kk} < 0$, $h' > 0$ e $h'' < 0$.

De acordo com a restrição orçamentária da economia, $y(t) = f(k(t), l(t))h(g_i(t)) = c(t) + i(t) + g(t)$, tem-se que o estoque de capital da economia evolui de acordo com a seguinte identidade macroeconômica:

$$\dot{k}(t) = f(k(t), l(t))h(g_i(t)) - c(t) - g(t) \qquad (1)$$

em que $g(t)$ representa o gasto total real do governo e $i(t) = \dot{k}(t)$. O termo $\dot{k}(t)$ representa a derivada de $k(t)$ em relação ao tempo.

A restrição orçamentária encarada pelo governo é representada pela equação diferencial:

$$\dot{b}(t) = rb(t) + g(t) - T(t) \quad (2)$$

onde, $b(t)$ é o estoque de dívida pública do governo, $T(t)$, é a arrecadação de imposto *lump-sun*, r a taxa de juros real e $\dot{b}(t)$ é a derivada de $b(t)$ em relação ao tempo.

O gasto total real do governo será considerado constante ao longo do tempo de acordo com a regra de política fiscal pretendida pelo governo. Isto posto, o gasto total será distribuído entre gasto em custeio $g_c(t)$ e gasto em infraestrutura $g_i(t)$, ou seja, $\overline{g} = g_c(t) + g_i(t)$ onde $\overline{g}$ representa o gasto total constante. Supor-se-á que $g_c(t) = \alpha\overline{g}$ e que $g_i(t) = (1-\alpha)\overline{g}$ onde $0 < \alpha < 1$.

Adicionalmente, a política de ajuste fiscal adotada pelo governo será a de superávit primário como proporção do PIB, ou seja:

$$T(t) - g(t) = \beta y(t) = \beta f(k(t), l(t))h(g_i(t)) \qquad (3)$$

onde, $T(t) - g(t)$, representa o superávit primário e $0 < \beta < 1$.

Portanto, o problema do agente representativo se resume formalmente em:

$$\max_{\{c.l\}} \int_0^\infty e^{-\rho t}[u(c(t), l(t)) + v(g_c(\alpha\overline{g})]dt \qquad (4)$$

sujeito às restrições:

$$\dot{k}(t) + \dot{b}(t) = (1-\beta) f(k(t), l(t))h((1-\alpha)\overline{g}) + rb(t) - c(t) - \overline{g}, \quad k(0) = k_0 \text{ e}$$

$$b(0) = b_0 .$$

Observe que essa última restrição é gerada a partir de manipulações algébricas das expressões (1), (2) e (3) e das definições de $g_i(t)$ e $g_c(t)$. As duas últimas restrições supõem que no estado inicial a economia apresente um estoque de capital inicial k_0 e que sua dívida pública no início seja igual a b_0.

As condições de primeira ordem do Hamiltoniano de valor corrente associado ao problema (4) são dadas por:

$$u_c(c(t), l(t)) = \lambda(t) \qquad (5)$$

$$u_l(c(t), l(t)) = -\lambda(t)(1-\beta) f_l(k(t), l(t))h((1-\alpha)\overline{g}) \qquad (6)$$

$$\lambda(t)(1-\beta) f_k(k(t), l(t))h((1-\alpha)\overline{g}) = \rho\lambda(t) - \dot{\lambda}(t) \quad (7)$$

$$\lambda(t)r = \rho\lambda(t) - \dot{\lambda}(t) \quad (8)$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)e^{-\rho t}k(t) = 0 \quad (9)$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)e^{-\rho t}b(t) = 0 \quad (10)$$

onde, $\lambda(t)$ é a utilidade marginal corrente da riqueza. As condições de transversalidades (9) e (10) são estabelecidas a fim de que as trajetórias de $\lambda(t)$ e $k(t)$ não sejam explosivas.

2.1 Análise do Equilíbrio de Curto-Prazo

As soluções para o consumo $c(t)$ e a oferta de trabalho $l(t)$ como funções da utilidade marginal da riqueza, $\lambda(t)$, do estoque de capital, $k(t)$ e dos parâmetros de política α e β são obtidas das expressões (5) e (6). Portanto, obtém-se como soluções $c = c(\lambda, k, \alpha, \beta)$ e $l = l(\lambda, k, \alpha, \beta)$ em que o período de tempo t não é mais colocado como argumentos das funções para efeito de simplificação de notação. Para analisar o efeito de cada um dos termos λ, k, α e β sobre c e l diferencia-se o sistema de equações (5) e (6). Assim, obtêm-se os sinais das seguintes relações:

$$\frac{\partial c}{\partial k} = c_k < 0,\quad \frac{\partial c}{\partial \lambda} = c_\lambda < 0\,,\quad \frac{\partial c}{\partial \alpha} = c_\alpha > 0\,,\quad \frac{\partial c}{\partial \beta} = c_\beta > 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial k} = l_k > 0\,,\quad \frac{\partial l}{\partial \lambda} = l_\lambda > 0\,,\quad \frac{\partial l}{\partial \alpha} = l_\alpha < 0,\quad \frac{\partial l}{\partial \beta} = l_\beta < 0$$

No Apêndice do artigo mostra-se formalmente como são obtidos os sinais e as expressões das relações acima.

Os impactos de curto prazo de variações do estoque de capital e da utilidade marginal da riqueza sobre o consumo e a oferta de trabalho são os esperados. No entanto, de acordo com as expressões de $\partial c / \partial k$ e $\partial l / \partial k$, quando a proporção do produto destinado ao superávit primário aumenta (aumento de β) tanto o aumento do consumo privado como a queda da oferta de trabalho são mais lentos.

Em relação aos impactos da composição dos gastos do governo sobre o consumo privado e a oferta de trabalho, o aumento dos gastos do governo destinados a custeio (aumento de α) implica aumento de consumo e diminuição da oferta de trabalho. Quando a proporção do produto destinada ao superávit primário aumenta (aumento de β) as sensibilidades do aumento e queda, respectivamente, do consumo e oferta de trabalho são mais lentas.

Por último, o aumento da proporção do superávit primário provoca aumento de consumo e diminuição da oferta de trabalho. Quanto ao primeiro efeito, o aumento de β deve influenciar o consumo através de um efeito renda e um efeito substituição com a predominância desse último. Com efeito, as expressões (6) e (7) dão origem a expressão $r = (1-\beta) f_k h$. Nestes termos, $dr / d\beta < 0$. Portanto, o aumento de β reduz a taxa de juros fazendo com que os indivíduos reduzam a poupança e aumentem o consumo.

2.2 Análise do Equilíbrio de Longo-Prazo

A dinâmica de equilíbrio de estado estacionário é obtida substituindo as funções $c = c(\lambda, k, g, \alpha, \beta)$ e $l = l(\lambda, k, g, \alpha, \beta)$ nas equações diferenciais (5) e (6). Assim obtém-se o seguinte sistema:

$$\dot{k} = f(k, l(\lambda, k, \alpha, \beta)) h((1-\alpha)\,\overline{g}) - c(\lambda, k, \alpha, \beta) - \overline{g} \quad (11)$$

$$\dot{\lambda} = [\rho - (1-\beta) f_k (k(\lambda, k, \alpha, \beta), l(\lambda, k, \alpha, \beta)) h((1-\alpha)\overline{g})]\lambda \quad (12)$$

Fazendo $\dot{k} = \dot{\lambda} = 0$ no sistema acima, pode-se obter o equilíbrio de estado estacionário. Dessa forma tem-se que:

$$f(\tilde{k}, l(\tilde{\lambda}, \tilde{k}, g, \alpha, \beta)) h((1-\alpha)\overline{g}) = c(\tilde{\lambda}, \tilde{k}, g, \alpha, \beta) + \overline{g}$$

$$(1-\beta) f_k (\tilde{k}, l(\tilde{\lambda}, \tilde{k}, g, \alpha, \beta)) h((1-\alpha)\overline{g}) = \rho$$

onde a solução do sistema acima permite determinar as variáveis de equilíbrio. As variáveis com tilda representam seus valores em estado estacionário. Os impactos de longo prazo dos parâmetros de política fiscal α e β sobre o estoque de capital e a utilidade marginal da riqueza no longo prazo são dados pelas seguintes relações[3]:

$$\partial\tilde{k} / \partial\alpha < 0,\ \partial\tilde{k} / \partial\beta < 0$$

$$\partial\tilde{\lambda} / \partial\alpha > 0,\ \partial\tilde{\lambda} / \partial\beta > 0$$

Portanto, aumentos de α e β diminuem o estoque de capital e aumentam a utilidade marginal da riqueza (diminuição do consumo de longo prazo).

A análise da dinâmica do sistema fica mais fácil se linearizarmos as equações (11) e (12) na vizinhança de seus equilíbrios de estado estacionário. Assim, obtêm-se as seguintes dinâmicas:

$$\dot{k} = \omega_{11}(k - \tilde{k}) + \omega_{12}(\lambda - \tilde{\lambda}) \qquad (13)$$

$$\dot{\lambda} = -\tilde{\lambda}(1-\beta)\omega_{12}(k - \tilde{k}) - \tilde{\lambda}(1-\beta)\omega_{22}(\lambda - \tilde{\lambda}) \quad (14)$$

onde, $\omega_{11} = (f_k l_k h - c_k) > 0$, $\omega_{12} = f_l l_\lambda h - c_\lambda > 0$, $\omega_{21} = (f_{kk} + f_{kl} l_k)h < 0$ e $\omega_{22} = f_{kl} l_\lambda h > 0$.

No Apêndice do artigo mostra-se formalmente que o equilíbrio de longo prazo é do tipo ponto de sela e que as equações dos braços estável e instável são, respectivamente, representadas pelas retas:

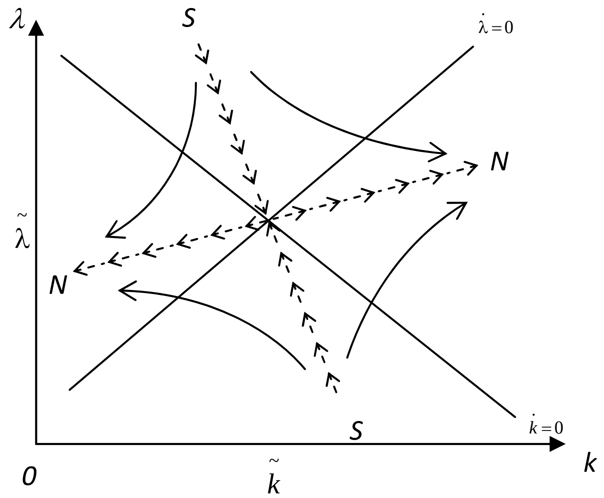
$$\lambda = \tilde{\lambda} + \frac{(\mu_1 - \omega_{11})}{\omega_{12}}(k - \tilde{k})$$

$$\lambda = \tilde{\lambda} + \frac{(\mu_2 - \omega_{11})}{\omega_{12}}(k - \tilde{k}),$$

onde μ_1 e μ_2 são os autovalores da matriz do sistema de equações (13) e (14). Desde que o equilíbrio é do tipo ponto de sela, supõe-se que $\mu_1 < 0$ e $\mu_2 > 0$. Como mostrado no apêndice a reta do braço estável apresenta inclinação negativa enquanto a do braço instável é inclinada positivamente, mas com a inclinação desta última menor que a do braço estável.

Desenhando essas retas no espaço $\lambda \times k$ levando em consideração as características de equilíbrio de ponto de sela e as propriedades dos braços estável e instável, obtém-se o diagrama de fase desse sistema conforme a Figura 1 a seguir. A reta SS representa o braço estável e a reta NN o braço instável.

Figura 1: Diagrama de Fases do Sistema



[3] Essas relações de longo prazo são obtidas solucionando o sistema de equações $\dot{\lambda} = 0$ e $\dot{k} = 0$.

3. CHOQUES FISCAIS PERMANENTES ANTECIPADOS E NÃO ANTECIPADOS

Nesta seção analisam-se as consequências de dois casos de choques fiscais: no primeiro o governo anuncia que irá aumentar seus gastos em infraestrutura em detrimento de gastos em custeio. Isso implica numa diminuição do parâmetro de política fiscal α; no segundo, o governo anuncia uma política de aumento de superávit primário como proporção do PIB. Isso se traduz no aumento do parâmetro β.

Em ambos os casos, leva-se em consideração que esses anúncios de política fiscal são não antecipados, ou seja, a mudança de política se dá de imediato, e antecipado quando o governo anuncia que a mudança de política se dará em um tempo futuro *T*. Além do mais, admite-se que esses choques fiscais são permanentes.

Os objetivos são analisar os efeitos dessas mudanças sobre as trajetórias do estoque de capital $k(t)$, da utilidade marginal da riqueza $\lambda(t)$ e sobre a estrutura a termo das taxas de juros. A estrutura formal de resolução do modelo e como se dão os deslocamentos dos equilíbrios são mostrados no apêndice.

3.1 Choque Permanente em α

Inicialmente considera-se o caso em que o governo anuncia que irá aumentar os gastos em infraestrutura (diminuição de α) no presente. Desde que $\partial\tilde{k}/\partial\alpha < 0$ e $\partial\tilde{\lambda}/\partial\alpha > 0$, o novo equilíbrio de longo prazo apresentará um estoque de capital maior (maior nível de investimento) e uma utilidade marginal da riqueza menor que implica um nível de consumo privado maior em relação ao equilíbrio inicial.

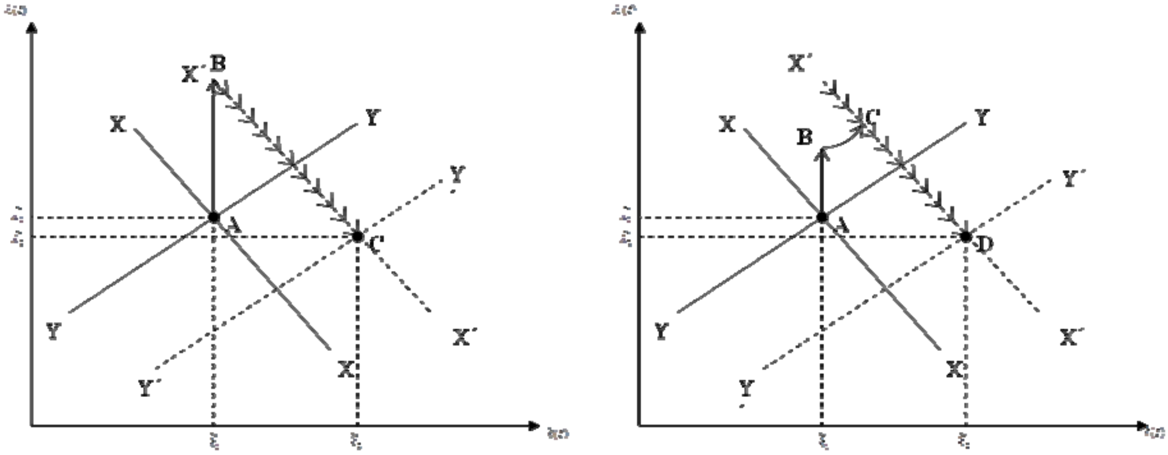


Figura 1a: Choque Não Antecipado   Figura 1b. Choque Antecipado

Quando do anúncio imediato de um corte em α as retas dos braços estável XX e do braço instável YY se deslocam para a direita originando um novo equilíbrio de estado estacionário representado pelo ponto C na Figura 1a. Portanto, há um deslocamento do equilíbrio inicial A para o novo equilíbrio de longo prazo C.

No curto prazo, logo após o anuncio de um corte em α a utilidade marginal da riqueza $\lambda(0)$ salta direto para o braço estável (ponto B na reta X’X’). Isso implica uma queda da riqueza privada ocasionando redução do consumo privado e aumento da oferta de trabalho. O aumento desta última provoca a elevação da produtividade marginal do capital o que faz com que a taxa de juros de curto prazo aumente.

Nesse mesmo tempo, a produtividade marginal do capital aumenta mais que a do equilíbrio de estado estacionário. De acordo com a equação de equilíbrio (7) isso faz com que $\dot{\lambda}(t) < 0$ implicando que a utilidade marginal da riqueza deverá decrescer e o consumo crescer. No entanto, deve ser observado que o tempo gasto dessas duas últimas para alcançar o novo equilíbrio de estado estacionário, de acordo com a equação (14), é mais demorado quanto maior for o superávit primário como proporção do PIB (maior for β).

Observa-se ainda que a queda de consumo inicial aumenta a poupança implicando em acumulação de capital físico. Nestes termos, a economia segue a trajetória de B para C. Nesse novo equilíbrio, o consumo privado, o estoque de capital (investimento) e o nível de produto são maiores comparados ao equilíbrio inicial.

No caso de um choque antecipado, quando o governo anuncia que irá cortar α em uma data futura T, desde que os agentes descontam a mudança no futuro, o salto da utilidade marginal da riqueza será menor. Mostra-se no apêndice que quanto mais distante for o tempo de mudança da política menor deverá ser o salto de $\lambda(t)$. Em assim sendo, $\lambda(t)$ salta de A para B na Figura 1b.

Tal qual o caso não antecipado, o estoque de capital no novo equilíbrio será maior e a utilidade marginal da riqueza menor e consequentemente maior o consumo privado. A diferença principal é o salto menor de $\lambda(0)$ e, portanto, com a riqueza privada caindo menos. Como consequência, a oferta de trabalho aumenta, o nível de produto aumenta e o consumo privado cai (aumento de poupança) em intensidades menores. Nesse mesmo tempo, como a oferta de trabalho aumentou há elevação da produtividade marginal do capital com o consequente aumento da taxa de juros de curto prazo. Isso também faz com que $\dot{\lambda}(t) < 0$ conforme equação de equilíbrio (7). Esse resultado aliado ao fato do aumento de poupança faz com que $\lambda(t)$ e $k(t)$ sigam a trajetória instável BC até alcançarem o braço estável X'X' quando de fato em T ocorre a mudança em α. A forma como $\lambda(t)$ e $k(t)$ se deslocam neste trajeto é justificada através de suas trajetórias na Figura 1. A partir desse ponto $\lambda(t)$ e $k(t)$ seguem suas trajetórias sobre o braço estável até alcançarem o novo equilíbrio de longo prazo representado pelo ponto D na Figura 1b. Os níveis de consumo privado, o estoque de capital (investimento) e o nível de produto também são maiores comparados ao equilíbrio inicial e idênticos aos do caso não antecipado.

Deve-se observar que os efeitos de um aumento dos gastos do governo em custeio sobre o consumo privado, investimento e o nível de produto são simétricos aos do caso de um aumento dos gastos em infraestrutura seja o anúncio antecipado ou não.

3.2 Choque Permanente em β

Nesse caso o governo anuncia no presente (anúncio não antecipado) que irá aumentar o superávit primário como proporção do PIB (aumento de β). Observa-se de $\partial\tilde{k} / \partial\beta < 0$ e $\partial\tilde{\lambda} / \partial\beta > 0$ que o novo equilíbrio de longo prazo se dará com o estoque de capital menor e a utilidade marginal da riqueza maior comparado ao equilíbrio inicial. Com efeito, o aumento de β desloca o braço estável XX para X'X' e o braço instável YY para Y'Y'. O novo equilíbrio de estado estacionário (longo prazo) é representado pelo ponto C na Figura 1c.

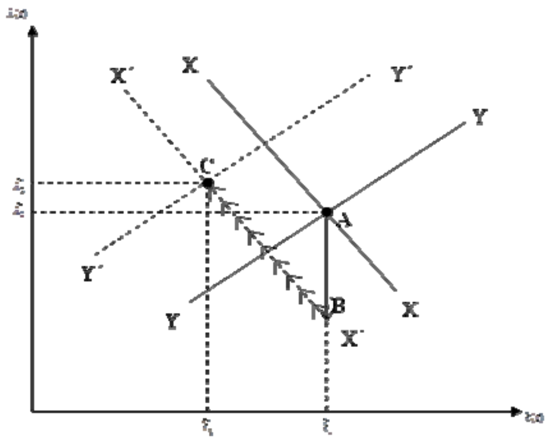


Figura 1c: Choque Não Antecipado

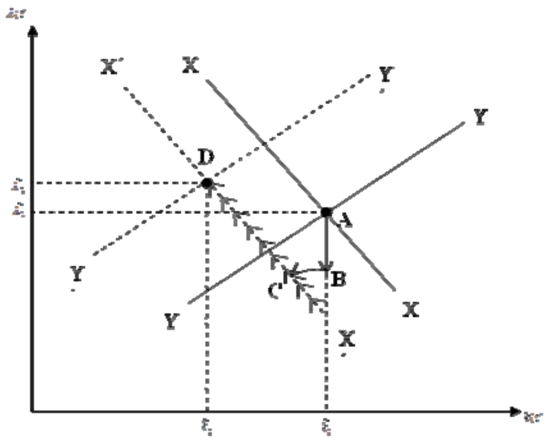


Figura 1d: Choque Antecipado

No momento do anúncio a utilidade marginal da riqueza $\lambda(0)$ salta de imediato do equilíbrio inicial A alcançando o braço estável X’X’ no ponto B. O aumento da riqueza privada em função da queda de $\lambda(t)$ provoca no curto prazo o aumento do consumo privado e uma diminuição da oferta de trabalho. Essa última induz uma queda da produtividade marginal do capital e, portanto, da taxa de juros de curto prazo.

Neste mesmo momento, a queda da produtividade marginal do capital abaixo do equilíbrio de longo prazo faz com que a utilidade marginal da riqueza tenha que voltar a crescer para manter o equilíbrio da relação (7). Isso se dará acompanhado de uma queda no consumo privado. No entanto, o aumento inicial do consumo (queda de poupança) gera diminuição de capital físico. Nestes termos, as trajetórias de $\lambda(t)$ e $k(t)$ partem de B até alcançarem o novo equilíbrio de longo prazo representado pelo ponto C.

Nesse novo equilíbrio de longo prazo, o consumo privado, o estoque de capital físico e o nível de produto são menores e a oferta de trabalho é maior comparado ao equilíbrio inicial.

No caso do anúncio da mudança de política para acontecer em uma data futura T (anúncio antecipado) os efeitos são semelhantes ao caso do anúncio não antecipado. A principal diferença é que o salto de $\lambda(0)$ é agora de menos intensidade por que os agentes antecipam que a mudança de política só se dará no tempo futuro T. Nesse caso, a utilidade marginal da riqueza cai de A para B na Figura 1d, ou seja, a riqueza privada aumenta. Evidente que quanto maior for T menor deverá ser o salto de $\lambda(0)$. No curto prazo a produtividade marginal do capital diminui implicando a queda da taxa de juros de curto prazo, mas em intensidades menores. Da equação de equilíbrio (7) conclui-se que a queda da produtividade marginal do capital implica $\dot{\lambda}(t) > 0$. Portanto, o consumo privado terá que diminuir para manter o equilíbrio da utilidade marginal da riqueza. No entanto, o aumento do consumo inicial gera uma diminuição de poupança desestimulando o investimento. Em assim sendo, a economia segue a trajetória de C para D quando alcança o novo equilíbrio de longo prazo.

Nesse novo equilíbrio os níveis de consumo privado, estoque de capital, produto e oferta de trabalho e as comparações entre os equilíbrios inicial e final são iguais aos do caso não antecipado.

Os efeitos de um corte no superávit primário (queda de β) são simétricos aos de um aumento do superávit primário.

4. ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

A taxa de juros de longo prazo será aquela que remunera títulos perpétuos e que pagam um cupom unitário periódico cujo valor de face é de uma unidade monetária. Se $P(t)$ é o preço do título e $R(t)$ é a sua taxa interna de retorno, tem-se que $R(t)=1/P(t)$. Em mercados eficientes e sem risco, por arbitragem, a taxa de curto prazo $r(t)$ terá que ser igual a taxa de longo prazo mais um ganho de capital $\dot{P}(t)/P(t)$. Em assim sendo, $r(t)=(1+\dot{P}(t))/P(t)$ dando origem a equação diferencial $\dot{P}(t)-r(t)P(t)=-1$.

A solução dessa equação para $P(t)$ olhando para o futuro, como mostrado no apêndice, apresenta a seguinte expressão $P(t)=\int_t^{\infty}\exp\left(-\int_t^s d(w)dw\right)ds$. Desde que $R(t)=1/P(t)$, a taxa de juros de longo prazo pode ser definida como $R(t)=1/\int_t^{\infty}\exp\left(-\int_t^s d(w)dw\right)ds$. Definindo-se $P(t,s)=\exp\left(-\int_t^s d(w)dw\right)$ como sendo o preço no período *t* de um título com cupom zero que matura na data *s*, tem-se então que $R(t)=1/\int_t^{\infty}P(t,s)ds$.

Mas como por hipótese o título de longo prazo tem valor de face unitário, esse valor de face terá que ser igual a soma das taxas de curto prazo sobre o preço no período *t* de um título com cupom zero que matura na data s. Ou seja, $\int_t^{\infty}r(s)P(t,s)ds=1$. Logo a taxa de juros de longo prazo $R(t)$ pode ser expressa como:

$$R(t)=\frac{\int_t^{\infty}r(s)P(t,s)ds}{\int_t^{\infty}P(t,s)ds} \qquad (15)$$

Em outros termos, a taxa de juros de longo prazo é uma média ponderada das taxas de juros de curto prazo perfeitamente previstas no futuro.

Das condições de equilíbrio (7) e (8) obtém-se que $r=(1-\beta)f_k(k,l(\lambda,k))h[(1-\alpha)\bar{g}]$. Linearizando essa expressão em torno do equilíbrio de estado estacionário, tem-se que sua trajetória obedece a seguinte expressão:

$$r(t)=\tilde{r}+(1-\beta)\omega_{21}(k(t)-\tilde{k})+(1-\beta)\omega_{22}(\lambda(t)-\tilde{\lambda})$$

onde, $\tilde{r}=\rho$. Portanto, a dinâmica para a taxa de juros de curto prazo é obtida diferenciando a expressão acima $r(t)$[4]. Assim,

$$\dot{r}(t)=(1-\beta)\omega_{21}\dot{k}(t)+(1-\beta)\omega_{22}\dot{\lambda}(t) \qquad (16)$$

Neste sentido, como $R(t)$ é uma média ponderada das taxas de juros de curto prazo perfeitamente previstas no futuro de acordo com (15), a sua dinâmica fica determinada a partir da análise de (16).

4.1 Choques Permanentes de α sobre as Taxas de Juros de Curto e Longo Prazo

Nesse caso, considera-se o anúncio de um aumento de gastos permanente do governo em infraestrutura (queda de α) que se dará de imediato (política não antecipada). De acordo com a análise da Subseção 3.1, $\lambda(t)$ salta de imediato para o

[4] A dinâmica de *R*(t) em torno do equilíbrio de estado estacionário é dada por $\dot{R}(t)=\rho[(R(t)-\tilde{R})-(1-\beta)\omega_{21}(k(t)-\tilde{k})-(1-\beta)\omega_{22}(\lambda(t)-\tilde{\lambda})]$ em que $\tilde{R}=\rho$.

braço estável X’X’. Esse aumento de $\lambda(t)$ provoca aumento da produtividade marginal do capital que por sua vez eleva a taxa de juros de curto prazo. Portanto, a taxa de juros de curto prazo também salta como mostra a Figura 2a.

Desde que a dinâmica da taxa $r(t)$ é governada pela equação (16), como após o salto de $\lambda(t)$, $k(t)$ segue uma trajetória crescente ($\dot{k}(t) > 0$) e $\lambda(t)$ uma trajetória decrescente $(\dot{\lambda}(t) < 0)$, a taxa de juros de curto prazo decrescerá ao longo do tempo até alcançar seu equilíbrio de estado estacionário ρ.

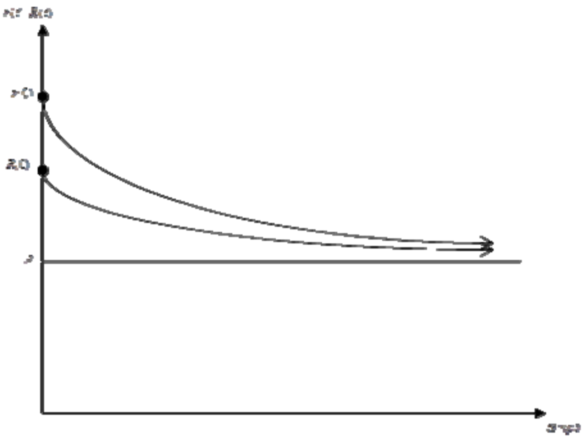


Figura 2a: Choque Não Antecipado

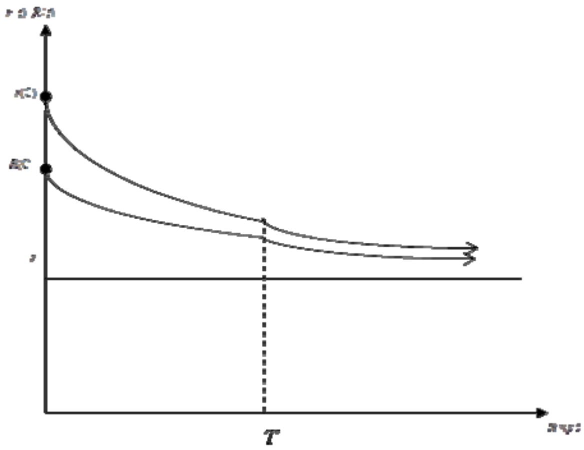


Figura 2b: Choque Antecipado

A taxa de juros de longo prazo é expressa como uma média ponderada das taxas de juros de curto prazo previstas perfeitamente no futuro, de acordo com a expressão (15). Em assim sendo, a taxa de juros de longo prazo também salta de seu equilíbrio inicial ρ para depois decrescer ao longo do tempo, sempre abaixo da trajetória de $r(t)$, até convergir novamente seu nível de equilíbrio inicial. De acordo com a expressão (16), é interessante observar que as convergências das taxas de juros de curto e longo prazo são mais demoradas quanto maior for superávit primário como proporção do PIB (aumento de β).

No caso em que o aumento de gastos em infraestrutura é anunciado para ocorrer em uma data futura T (política antecipada), as trajetórias de convergências das taxas de juros são semelhantes ao do caso anterior com sutis diferenças. Suas trajetórias estão desenhadas na Figura 2b. Primeiro seus saltos iniciais são de menores intensidades em função dos agentes anteciparem que a mudança de política somente se dará no tempo futuro T.

Segundo, após o salto de $\lambda(t)$ para B na Figura 1b, $k(t)$ e $\lambda(t)$ seguem uma trajetória instável decrescente até alcançarem o braço estável X’X’ quando então ocorre a mudança de política no tempo T. De acordo com a expressão (16), neste mesmo período de tempo, a taxa de juros $r(t)$ decresce, mas em intensidade menor devido ao crescimento de $\lambda(t)$ como mostra a Figura 2b. A partir do tempo T, como $k(t)$ cresce e $\lambda(t)$ decresce a taxa de juros de curto prazo converge mais rapidamente para o seu equilíbrio inicial que no trajeto anterior. Esses detalhes podem ser observados na Figura 2b.

4.2 Choques Permanentes de β sobre as Taxas de Juros de Curto e Longo Prazo

Supõe-se agora que o governo anuncie que irá de imediato aumentar o superávit primário como proporção do PIB (política não antecipada). Como visto anteriormente, isso implica o aumento do parâmetro de política fiscal β.

Observou-se na Figura 1c da Subseção 3.2 que o aumento de β provoca um salto para baixo da taxa de curto prazo logo no momento do anúncio de mudança de política devido à queda da utilidade marginal da riqueza. Após a queda inicial de $\lambda(t)$ o estoque de capital $k(t)$ começa a decrescer e $\lambda(t)$ a crescer. De acordo com a dinâmica da equação (16) a taxa de curto prazo começa a crescer ao longo do tempo até alcançar novamente seu equilíbrio de longo prazo ρ, como mostra o diagrama da Figura 2c.

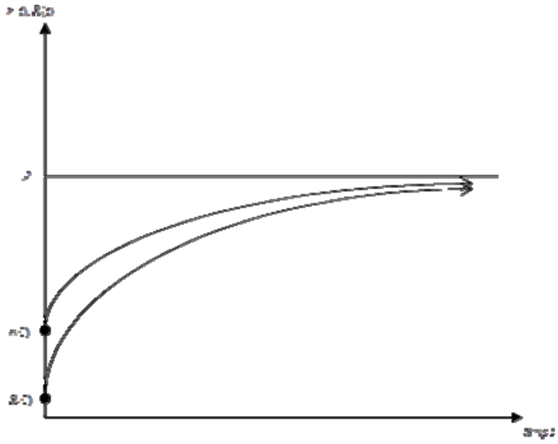


Figura 2c: Choque Não antecipado

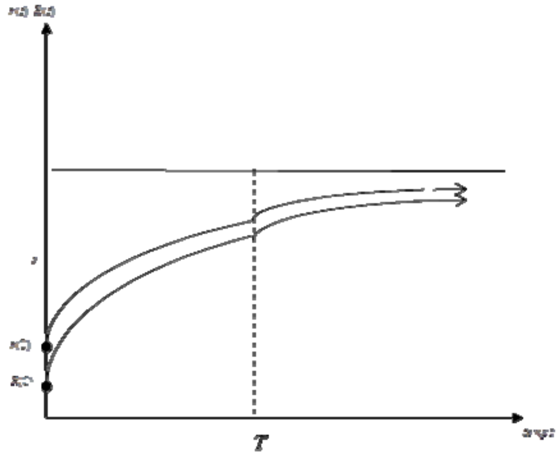


Figura 2d. Choque Antecipado

Desde que a taxa de juros de longo prazo é uma média ponderada das taxas de curto prazo previstas perfeitamente a crescerem no tempo, esta também sofre uma queda inicial em intensidade maior do que a queda da taxa de curto prazo. Após essa queda inicial, ela apresenta uma trajetória crescente, mas sempre abaixo da trajetória da de curto prazo até alcançar o seu nível de equilíbrio inicial ρ. A Figura 2c ilustra melhor essa convergência. No entanto, mais uma vez deve-se salientar que o aumento na intensidade de β torna mais demorada as convergências de ambas as taxa de juros.

No caso em que o aumento do superávit primário somente ocorrerá em uma data futura T (política antecipada), os movimentos das taxas de curto e longo prazo não são muito diferentes. Tal e qual o caso de política não antecipada, ambas as taxas de juros caem, mas em intensidades menores. Afinal os agentes descontam que só haverá mudança de política em uma data futura. Veja o diagrama da Figura 2d. A partir desses saltos, ambas as taxas de juros começam a crescer no tempo, mas com a taxa de longo prazo sempre abaixo da de curto prazo. Observa-se na Figura 1d que após o salto inicial de ,$\lambda(t)$, o estoque de capital e a utilidade marginal da riqueza seguem trajetórias instáveis (de B para C) até alcançarem o ponto C quando de fato o aumento de superávit primário é implementado. Isso se dá no período de tempo T. Nessas trajetórias como $k(t)$ e $\lambda(t)$ decrescem no tempo, da equação (16) se conclui que a taxa de juros de curto prazo deve crescer, embora a queda de $\lambda(t)$ arrefeça esse crescimento.

A partir do ponto C, $k(t)$ continua na sua trajetória de queda enquanto $\lambda(t)$ passa a crescer. O resultado é que a taxa de juros de curto prazo após o período de tempo T continua a crescer mais rapidamente do que no período anterior. A taxa de juros de longo prazo apresenta os mesmos movimentos com a diferença de que a sua trajetória para o equilíbrio inicial é sempre abaixo da de curto prazo. Afinal, ela é uma média ponderada das taxas de curto prazo perfeitamente previstas pelos agentes.

Nesse caso também, a intensidade do parâmetro de política fiscal β arrefece as convergências de ambas as taxa de juros para seus equilíbrios iniciais.

5 POLÍTICA FISCAL E BEM ESTAR SOCIAL

Para analisar os efeitos de mudanças nos parâmetros de política fiscal sobre o a utilidade total descontada, será considerada a trajetória estável da utilidade instantânea linearizada na vizinhança de seu estado estacionário. Segundo Turnovsky e Fisher (1995) e Turnovsky (1997), tem-se que a utilidade dos agentes $U(c(t), l(t), g_c(t))$ pode ser decomposta como:

$$U(t) \cong \tilde{U} + \left(U(0) - \tilde{U}\right)e^{\mu_1 t},$$

em que para efeito de simplificação adota-se a notação $U(t) = U(c(t), l(t), g_c(t))$.

Denotando por, W, a utilidade total descontada, então:

$$W = \int_0^\infty \left[\tilde{U} + \left(U(0) - \tilde{U}\right)e^{\mu_1 t}\right]e^{-\rho t}\,dt,$$

implicando que:

$$W = \frac{\tilde{U}}{\rho} + \frac{\left(U(0) - \tilde{U}\right)}{\rho - \mu_1}$$

Na expressão acima o termo, $\tilde{U}/\rho$, representa o bem-estar instantâneo descontado pela taxa de desconto intertemporal, ρ. Este termo expressa o nível de bem-estar resultante caso o longo prazo fosse alcançado instantaneamente. O termo, $(U(0) - \tilde{U})/(\rho - \mu_1)$, representa o ajustamento até o equilíbrio de longo-prazo, já que numa economia com acumulação de capital, o estado estacionário é alcançado gradualmente.

O principal objetivo desta seção é encontrar uma política orçamentária que maximize o bem estar social, que no presente trabalho é quantificado por W. Especificamente, serão obtidas expressões para $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, tais que:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \underset{\alpha, \beta \in [0,1]}{\arg\max}\, W \qquad (17)$$

Infelizmente não é possível obter uma solução geral para o problema (17), uma vez que a dependência de $U(0)$ e $\tilde{U}$ nos parâmetros α e β é dada implicitamente através das funções utilidade do agente representativo e da tecnologia de produção. Portanto a fim de conferir maior tratabilidade ao problema, serão feitas algumas especificações.

Inicialmente, o problema (17) será substituído pelo problema equivalente:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \underset{\alpha, \beta \in [0,1]}{\arg\max}\, \overline{W} \qquad (18)$$

onde $\overline{W} = \rho W$, tal que $\overline{W} = \tau U(0) + (1-\tau)\tilde{U}$ com $\tau = \rho/(\rho + |\mu_1|)$. Supõe-se que τ é independe de α e β.

Em adição às suposições acima, serão adotadas formas funcionais para a função utilidade do consumidor representativo e para a tecnologia de produção. Seguindo Christiano, Eichenbaum, and Rebelo (2011), supor-se-á que a função utilidade (instantânea) do consumidor representativo toma a forma:

$$U(c,l,\alpha\bar{g}) = \frac{\left(c^{\gamma}(1-l)^{1-\gamma}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \varphi \ln \alpha\bar{g} \quad se \;\; \sigma \neq 1 \tag{19}$$

tal que, a menos que mencionado o contrário, todos os parâmetros da função utilidade são não-negativos com $0 < \gamma < 1$.

A função de produção por outro lado segue a proposta de Barro (1990) de gastos públicos produtivos, de maneira que:

$$F(k,l,(1-\alpha)\bar{g}) = Ak^{\delta}l^{1-\delta}((1-\alpha)\bar{g})^{\eta}$$

onde todos os parâmetros da função especificada acima são positivos e, adicionalmente, $0 < \delta < 1$. Note que o parâmetro η mede a elasticidade do produto em relação aos gastos em infraestrutura, ou seja, para uma expansão de 1% no investimento público o produto responde com um crescimento de $\eta\%$.

Por fim será suposto que o esquema de tributação em $t = 0$ e no estado estacionário serão tratados como parâmetros. Isso significa que, se denotarmos por $y(t)$ o produto *per capita* da economia, então, para dada política de austeridade β, tem-se, respectivamente:

$$\beta y(0) = T(0) - \bar{g} = s_0$$

$$\beta\tilde{y} = \tilde{T} - \bar{g} = \tilde{s}$$

Portanto, a suposição feita acima significa que, na solução do problema (18), s_0 e $\tilde{s}$ serão tratados como parâmetros.

Com as especificações feitas acima, é possível obter soluções explicitas para as variáveis endógenas do modelo na data inicial bem como no estado estacionário. De acordo com a Proposição 1 no Apêndice, as soluções para a oferta de trabalho e consumo privado para $t = 0$ são, respectivamente:

a) $l(0) = \left[\dfrac{s_0}{\beta A k_0^{\delta}((1-\alpha)\bar{g})^{\eta}}\right]^{\frac{1}{1-\delta}}$;

b) $c(0) = \dfrac{\gamma(1-\delta)s_0}{\beta(1-\gamma)}\dfrac{1-l(0)}{l(0)}$.

No estado estacionário, as soluções para o consumo, oferta de trabalho e estoque de capital são iguais a:

c) $\tilde{l} = \dfrac{(1-\gamma)(\tilde{s}-\beta\bar{g})}{(1-\gamma)(\tilde{s}-\beta\bar{g}) + \gamma(1-\delta)(1-\beta)\tilde{s}}$;

d) $\tilde{c} = \dfrac{\tilde{s}-\beta\bar{g}}{\beta}$;

e) $\tilde{k} = \dfrac{(1-\beta)\delta\tilde{s}}{\rho\beta}$.

Substituindo essas soluções em (19), obtêm-se, após algumas manipulações algébricas, as seguintes expressões para $U(0)$ e $\tilde{U}$:

$$U(0)=\left[\frac{\gamma(1-\delta)}{\beta(1-\gamma)}\right]^{\gamma(1-\sigma)}\frac{s_0^{-\frac{\gamma\delta(1-\sigma)}{1-\delta}}}{1-\sigma}\frac{\left[\phi(\alpha)^{\frac{1}{1-\delta}}-s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{1-\sigma}}{\phi(\alpha)^{\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\delta}}}+\varphi\ln\alpha\bar{g}-\frac{1}{1-\sigma}$$

$$\tilde{U}=\frac{(1-\gamma)^{(1-\gamma)(1-\sigma)}}{\beta^{\gamma(1-\sigma)}(1-\sigma)}\frac{(\tilde{s}-\beta\bar{g})^{(1-\sigma)}}{\left[(1-\gamma)(\tilde{s}-\beta\bar{g})+\gamma(1-\delta)(1-\beta)\tilde{s}\right]}+\varphi\ln\alpha\bar{g}-\frac{1}{1-\sigma}$$

onde, $\phi(\alpha)=\beta A k_0^{\delta}((1-\alpha)\bar{g})^{\eta}$.

Antes de investigar as condições de primeira ordem do problema (18) é oportuno verificar se podem existir soluções de canto, pois as mesmas devem estar restritas ao intervalo unitário. De início as soluções $\beta=0$ e $\alpha=1$ podem ser descartadas, pois tornam a função objetivo descontínua impossibilitando o uso das condições de primeira ordem. Nota-se ainda que a função objetivo depende de $\ln\alpha$ que tende a menos infinito quando α se aproxima de zero, assim a solução $\alpha=0$ não pode ser ótima.

Por fim, a solução $\beta=1$ não pode ser descartada de imediato, entretanto se for este o caso a economia entra numa trajetória em que os ativos serão destruídos, pois não haverá acumulação. Assim o problema (18) será tratado como um problema de maximização sem restrição e, de posse das condições de primeira ordem será analisado se $\beta=1$ satisfaz tais condições.

Dados os argumentos acima, as condições de primeira ordem de (18) para α e β são dadas, respectivamente, por[5]:

$$\left[\frac{\tau\eta(1-\sigma)}{(1-\delta)}\right]\left[\frac{\gamma(1-\delta)s_0}{\hat{\beta}(1-\gamma)}\right]^{\gamma(1-\sigma)}\frac{\left[\phi(\hat{\alpha})^{\frac{1}{1-\delta}}-s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{-\sigma}\left[\gamma\phi(\hat{\alpha})^{\frac{1}{1-\delta}}+(1-\gamma)s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]}{\phi(\hat{\alpha})^{\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\delta}}}=\frac{1-\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}} \quad (20)$$

e

$$-\tau\left[\frac{\gamma(1-\delta)}{(1-\gamma)}\right]^{\gamma(1-\sigma)}\gamma\hat{\beta}^{-[1+\gamma(1-\sigma)]}s_0^{-\frac{\delta\gamma(1-\sigma)}{1-\delta}}\frac{\left[\phi(\hat{\alpha})^{\frac{1}{1-\delta}}-s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{1-\sigma}}{\phi(\hat{\alpha})^{\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\delta}}}+$$

$$+(1-\tau)\frac{(1-\gamma)^{(1-\gamma)(1-\sigma)}\hat{\beta}^{-\gamma(1-\sigma)}(\tilde{s}-\hat{\beta}\bar{g})^{-\sigma}}{(1-\sigma)\left[(1-\sigma)(\tilde{s}-\hat{\beta}\bar{g})+\delta\sigma(1-\hat{\beta})\tilde{s}\right]^{(1-\gamma)(1-\sigma)}}\times \quad (21)$$

$$\times\left\{-\gamma(1-\sigma)\hat{\beta}^{-1}(\tilde{s}-\hat{\beta}\bar{g})+\frac{\left[(1-\gamma)\delta\sigma\tilde{s}-\gamma(1-\sigma)\bar{g}\right](\tilde{s}-\hat{\beta}\bar{g})-\delta\sigma(1-\hat{\beta})\bar{g}}{(1-\sigma)(\tilde{s}-\hat{\beta}\bar{g})+\delta\sigma(1-\hat{\beta})\tilde{s}}\right\}=0$$

Note que uma solução explícita para (20) e (21) é possível somente em casos muito particulares (alguns desses casos serão vistos adiante). Entretanto é possível obter algumas conclusões qualitativas sobre as regras ótimas de austeridade e composição orçamentárias sem a necessidade de soluções explícitas.

Utilizando a equação (20) a Proposição 2 demonstrada no Apêndice, afirma que se $\eta>\left[((1-\gamma)/\gamma)^{\gamma(1-\sigma)}\right]/\tau(1-\sigma)$ então qualquer solução válida para α deve ser tal

[5] Os detalhes do procedimento estão disponíveis no Apêndice.

que $\hat{\alpha} < 0,5$. Isso leva a seguinte conclusão: s*e a elasticidade do produto em relação aos gastos em infraestrutura for suficientemente alta e se o volume de emprego na data inicial representa mais da metade da mão de obra disponível, então a solução socialmente ótima prescreve que a maior parte do orçamento público seja alocada em investimentos (gastos em infraestrutura).*

Para se ter uma idéia da grandeza de η necessária para validar a Proposição 2, consideremos um exemplo numérico. Suponha que o consumo e lazer sejam igualmente ponderados na utilidade do agente representativo e que a elasticidade de substituição intertemporal seja igual a 2. Neste caso tem-se $\gamma = 0,5$ e $\sigma = 0$, tal que a condição sobre a elasticidade do produto em relação ao gasto público em infraestrutura é $\eta > 1/\tau$. Ou seja, quanto menor for a importância da utilidade hoje em relação ao longo prazo, maior deve ser η a fim de que, no ótimo social, tenha-se $\hat{\alpha} < 0,5$.

O resultado acima merece algumas considerações. A relação inversa entre elasticidade do produto e importância do bem estar no curto prazo, significa que antes de qualquer coisa $\eta > 1$, ou seja, para garantir que o ótimo social seja caracterizado por alocar a maior parte do orçamento em investimentos, o produto da economia deve ser elástico nessa rubrica. Isso decorre do fato que, no caso da especificação Cobb-Douglas para a função de produção, capital privado e capital público exibem certo grau de substituição[6], de maneira que quanto maior o valor de η, menor será essa substituição, e, portanto, na composição do produto da economia, capital público e capital privado serão complementares.

Os argumentos acima, complementam as análises dos choques fiscais sobre o equilíbrio de longo-prazo. Como foi visto na seção 3, um aumento na proporção de gastos destinados à infraestrutura, sempre aumenta o capital no estado estacionário, portanto, em se considerando os efeitos de longo prazo, quanto maior o valor de η, maior será o impacto, sobre o produto, resultante de um aumento dos gastos em infraestrutura, pois capital privado e capital público aumentarão complementarmente.

Por fim, para completar a análise, observe que quanto maior o valor de η, menor deve ser o valor de τ, o que por sua vez implica que maior deve ser a importância do longo-prazo na composição do bem-estar social, reforçando assim os argumentos em favor de maior complementaridade entre capital privado e capital público.

Note que o resultado $\hat{\alpha} < 0,5$ independe do valor de β no ótimo social, portanto, neste caso a expressão $\tilde{\beta} = (\tilde{T} - \bar{g}) / \tilde{y} = \tilde{s} / \tilde{y}$ é suficiente para a determinação da regra ótima de austeridade fiscal, onde $\tilde{y}$ é o produto no estado estacionário que é obtido usando-se a Proposição 1.

É importante salientar que, muito embora a solução proposta para $\tilde{\beta}$ seja dada implicitamente, é imediato que a sua magnitude depende do volume de superávit (carga tributária) desejado pela autoridade fiscal e do tamanho do produto no equilíbrio de longo prazo. Especificamente, por meio de diferenciação implícita, pode-se mostrar que, o sinal de $d\hat{\beta}/ds$ depende de $1 - \varepsilon_{y,s}$, onde $\varepsilon_{y,s}$ é a elasticidade do produto em relação à magnitude do superávit primário fixado pela autoridade fiscal (ambos no longo prazo).

---

[6] Especificamente, a Taxa Marginal de Substituição Técnica entre capital privado e capital público é dada por

$$\frac{\delta}{\eta} \frac{(1-\alpha)\bar{g}}{k}$$

Como essa elasticidade é sempre positiva (por definição), o sinal de $d\hat{\beta}/ds$ depende da magnitude de $\varepsilon_{y,s}$.

Especificamente, se o produto é inelástico em relação ao superávit primário, então quanto maior for o superávit primário maior deverá ser a magnitude de $\hat{\beta}$. Esse é um resultado intuitivo, e, à primeira vista o único possível. Entretanto o modelo abre a possibilidade de que um aumento em s possa vir acompanhado de uma redução em β. Para tanto, basta que o produto na economia seja elástico em relação ao superávit primário, ou seja, se $\varepsilon_{y,s} > 1$ então o sinal da derivada $d\hat{\beta}/ds$ é negativo.

Qual é a intuição para esse resultado? Inicialmente parece razoável supor que a magnitude de $\varepsilon_{y,s}$ depende do tamanho do governo na economia (medido pela razão $\bar{g}/y$) no seguinte sentido: quanto maior for a importância do governo na economia, mais intensos serão os impactos dos resultados fiscais sobre o produto, isto posto, pode-se conjecturar que, em economias nas quais $\bar{g}/y$ é suficientemente grande, tem-se $\varepsilon_{y,s} > 1$. Naturalmente essa conjectura carece de comprovação, através de alguma proposição geral ou regularidade empírica, ambos os exercícios, entretanto, estão fora do escopo do presente trabalho[7].

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando o governo anuncia que irá de imediato aumentar seus gastos em infraestrutura (queda nos gastos em custeio), no curto prazo ocorre uma queda (salto) da riqueza privada ocasionando uma queda do consumo privado e aumento da oferta de trabalho. Como consequência, a produtividade marginal do capital aumenta fazendo com que a taxa de juros de curto prazo também aumente.

A partir desse momento se inicia uma dinâmica do equilíbrio inicial para um novo equilíbrio de longo prazo (equilíbrio de estado estacionário). Como no momento inicial há uma queda do consumo privado (aumento de poupança) o estoque de capital começa a crescer na direção do novo equilíbrio de longo prazo. Simultaneamente a utilidade marginal da riqueza após o aumento inicial começa a decrescer. No entanto, o tempo gasto para que a utilidade marginal da riqueza e, consequentemente, o consumo privado e a oferta de trabalho levam para alcançar o novo equilíbrio de estado estacionário, é mais demorado quanto maior for o superávit primário como proporção do PIB (maior for β).

No equilíbrio de longo prazo o consumo privado, o estoque de capital (investimento) e o nível de produto são maiores comparados ao equilíbrio inicial.

Em relação à estrutura a termo da taxa de juros, a taxa de juros de curto prazo aumenta de imediato logo que o governo anuncia que irá aumentar seus gastos em infraestrutura. Após esse salto inicial, ela apresenta uma trajetória decrescente na direção de seu equilíbrio de longo prazo. Desde que a taxa de juros de longo prazo é uma média ponderada das taxas de juros de curto prazo perfeitamente previstas no futuro, ela também salta, mas em intensidade menor que a de curto prazo para, em seguida, convergir para seu equilíbrio de estado estacionário. Quanto maior a meta de

[7] O argumento pode ser apresentado de forma menos contundente se for admitido que a relação entre as magnitudes de $\varepsilon_{y,s}$ e $\bar{g}/y$ é probabilística. Especificamente, usando a notação $G = \bar{g}/y$, pode-se admitir que $\Pr[\varepsilon_{y,s} > 1 | G]$ é uma função crescente de G.

superávit primário mais tempo ambas as taxas de juros levam para alcançar seus novos equilíbrios.

Por fim, os resultados sobre a política fiscal e orçamentária que maximizam o bem-estar social, prescrevem que, se o produto é suficientemente sensível aos gastos em infraestrutura ou o curto prazo é de pouca relevância no cômputo da utilidade total descontada, então a maior parte dos recursos públicos deve ser alocada em gastos em investimento, desde que o total de trabalhadores empregados seja superior à 50% da mão de obra disponível. Por outro lado, a proporção do PIB destinado ao déficit primário depende da elasticidade da renda *per capita* em relação ao desempenho fiscal da economia. Especificamente, se a renda *per capita* é elástica em relação ao superávit primário, então, mesmo que autoridade fiscal decida pelo aumento absoluto este último, a proporção do PIB destinado a tanto pode ser menor.

BIBLIOGAFIA

1. AGENOR, PIERRE-RICHARD (2005), FISCAL ADJUSTMENT AND LABOR MARKET DYNAMICS IN AN OPEN ECONOMY, JOURNAL OF DEVELOPMENT ECONOMICS, 78(1), 97-125.

2. ALESINA, A. AND A. DRAZEN, (1991), WHY ARE STABILIZATIONS DELAYED ?, AMERICAN ECONOMIC REVIEW, 81, 1170-1188.

3. ALESINA, A., R. PEROTTI AND J. TAVARES (1998), THE POLITICAL ECONOMY OF FISCAL ADJUSTMENTS, BROOKING PAPERS ON ECONOMIC ACTIVITY, 1, 197-266.

4. ASCHAUER, D.A. (1988), THE EQUILIBRIUM APPROACH TO FISCAL POLICY, JOURNAL OF MONEY, CREDIT AND BANKING 20, 41-62.

5. ASCHAUER, D.A. (1989), IS PUBLIC EXPENDITURE PRODUTIVE ?, JOURNAL OF MONETARY ECONOMICS 23, 177-200.

6. ASCHAUER, D.A. (1990), WHY IS INFRAESTRUCTURE IMPORTANT ?, IN: A.H. MUNNELL, ED., IS THERE A SHORTFALL IN PUBLIC CAPITAL INVESTMENT (FEDERAL RESERVE BANK OF BOSTON, MA), 21-68.

7. BARRO, R.J., (1990) GOVERNMENT SPENDING IN A SIMPLE MODEL OF ENDOGENOUS GROWTH, JOURNAL OF POLITICAL ECONOMY 98, S103-S125.

8. BARRO, R.J. (1991), ECONOMIC GROWTH IN A CROSS SECTION OF COUNTRIES, QUARTERLY JOURNAL OF ECONOMICS, 106, 407-443.

9. BAXTER, M. AND R.G. KING (1993), FISCAL POLICY IN GENERAL EQUILIBRIUM, AMERICAN ECONOMIC REVIEW 83, 315-334.

10. BLANCHARD, O. (1990), SUGGESTIONS FOR A NEW SET OF FISCAL INDICATORS, OECD ECONOMICS DEPARTMENT WORKING PAPERS.

11. BLANCHARD, O., J.C. CHOURAQUI, R.P. HAGEMANN, N. SARTOR (1990), THE SUSTAINABILITY OF FISCAL POLICY: NEW ANSWERS TO AN OLD QUESTION, OECD ECONOMIC STUDIES, 15, 7-36.

12. CHARI, V.V. AND P.J. KOHE (1999), OPTIMAL FISCAL AND MONETARY POLICY, NBER WORKING PAPER W6891.

13. Christiano, L., M. Eichenbaum and S. Rebelo (2011), When is the Government Spending Multiplier Large? Journal of Political Economy, 119(1), pp. 78-121 .

14. Drazen, A. (2002), Fiscal Rules from a Political Economy Perspective, Tel Aviv University Working Paper.

15. Ferreira, P.C. (1999), Inflationary Financing of Public Investment and Economic Growth, Journal of Economic Dynamics and Control, 23(4), 539-563.

16. Fuente, Angel de la (2000), Mathematical Methods and Models for Economics, Cambridge University Press: Cambridge UK.

17. Hirsh, M.W. and S. Smale (1989), Differentials Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press: San Diego.

18. Marinho, E. e M. Benegas (2006), Ajuste Fiscal no Brasil: Por que Adotar o Regime de Superávit Primário ou de Déficit Nominal Zero? Em: Finanças Públicas - XI Prêmio Tesouro Nacional, parte I.

19. Rocha, F. e Pichetti, Paulo (2003), Fiscal Adjustment in Brazil, Revista Brasileira de Economia, 57(1), 239-252.

20. Stockman, D.R. (2001), Balanced-Budget Rules: Welfare Loss and Optimal Policies, Review of Economic Dynamics, 4(2), 438-459.

21. Turnovsky, S.J. (1997), Methods of Macroeconomic Dynamics, MIT Press: Cambridge, MA.

22. Turnovsky, S.J. and W.H. Fisher (1995), The Composition of Government Expenditure and its Consequences for Macroeconomic Performance, Journal of Economic Dynamics and Control 19, 747-786.

23. Woodford, M. (1996), Control of the Public Debt: A Requirement for Price Stability ?, NBER Working Paper 5684.

APÊNDICE

1. ESTÁTICA COMPARATIVA DE CURTO PRAZO

As equações (5) e (6) da Seção 1 permitem que se encontrem as soluções para o consumo $c(t)$ e a oferta de trabalho $l(t)$ como funções da utilidade marginal da riqueza, $\lambda(t)$, do estoque de capital, $k(t)$ e dos parâmetros de política α e β. Assim, diferenciando (5) e (6) encontra-se que:

$$\begin{pmatrix} U_{cc} & U_{cl} \\ U_{lc} & U_{ll} + \lambda(1-\beta) f_{ll} h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc \\ dl \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda(1-\beta) f_{kl} & -(1-\beta) f_l h & \lambda(1-\beta) h' \bar{g} & \lambda f_{lk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk \\ d\lambda \\ d\alpha \\ d\beta \end{pmatrix}$$

A solução do sistema acima dá origem as seguintes relações de curto prazo da Subseção 2.1:

$\frac{dc}{dk}=\frac{\lambda(1-\beta)f_{lk}U_{cl}h}{\Delta}<0$, $\frac{di}{dk}=\frac{-\lambda(1-\beta)f_{lk}U_{cc}h}{\Delta}>0$, $\frac{dc}{d\lambda}=\frac{U_{ll}+\lambda(1-\beta)f_{ll}h+(1-\beta)f_{l}h}{\Delta}<0$,
$\frac{di}{d\lambda}-\frac{-[(1-\beta)f_l U_{cc}h+U_{lc}]}{\Delta}>0$, $\frac{dc}{d\alpha}=\frac{-\lambda(1-\beta)f_l U_{cl}h\iota g}{\Delta}>0$, $\frac{dc}{d\beta}=\frac{-\lambda f_l U_{cl}h}{\Delta}>0$ e
$\frac{di}{d\beta}=\frac{\lambda f_l U_{cc}h}{\Delta}<0$.

2. DEMONSTRAÇÃO DE QUE O EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO É DE PONTO DE SELA

O sistema de equações linearizado (13) e (14) na vizinhança do estado estacionário pode ser escrito na forma matricial como:

$$\binom{\dot{k}}{\dot{\lambda}}=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ -(1-\beta)\tilde{\lambda}w_{21} & -(1-\beta)\tilde{\lambda}w_{22}\end{pmatrix}\binom{k-\tilde{k}}{\lambda-\tilde{\lambda}}.$$

Para demonstrar que o equilíbrio do sistema é do tipo ponto de sela, resta mostrar que o determinante do sistema acima é negativo. Com efeito, pois o sinal do determinante $-\tilde{\lambda}(1-\beta)[w_{11}w_{22}-w_{21}w_{12}]<0$, dados que $w_{11}>0$, $w_{22}>0$, $w_{12}>0$, $w_{21}<0$ e $0<\beta<1$. Além do mais, como $-\tilde{\lambda}(1-\beta)[w_{11}w_{22}-w_{21}w_{12}]=\mu_1\mu_2$, onde μ_1 e μ_2 são os autovalores associados a matriz do sistema acima, admitiremos sem perda de generalidade que $\mu_1<0$ e $\mu_2>0$.

3. EQUAÇÕES DOS BRAÇOS ESTÁVEL E INSTÁVEL DO EQULÍBRIO DE PONTO DE SELA, DETERMINAÇÃO DAS TRAJETÓRIAS DE $k(t)$ E $\lambda(t)$ E DO SALTO DE $\lambda(t)$

Admite-se que o governo anuncie hoje uma mudança de política fiscal a ocorrer no tempo futuro T > 0. Em outras palavras a mudança de política é antecipada pelos agentes. Inicialmente, a solução para $k(t)$ e $\lambda(t)$ no período $0\leq t<T$ são as seguintes:

$$k(t)=\tilde{k}_1+A_1e^{\mu_1 t}+A_2e^{\mu_2 t}$$

$$\lambda(t)=\tilde{\lambda}_1+A_1\left(\frac{\mu_1-w_{11}}{w_{12}}\right)e^{\mu_1 t}+A_2\left(\frac{\mu_2-w_{11}}{w_{12}}\right)e^{\mu_2 t}$$

Para o período $t\geq T$, as soluções para $k(t)$ e $\lambda(t)$ são:

$$k(t)-\tilde{k}_2+A_1'e^{\mu_1 t}+A_2'e^{\mu_2 t}$$

$$\lambda(t)=\tilde{\lambda}_2+A_1'\left(\frac{\mu_1-w_{11}}{w_{12}}\right)e^{\mu_1 t}+A_2'\left(\frac{\mu_2-w_{11}}{w_{12}}\right)e^{\mu_2 t}$$

Para atender a condição de transversalidade (9), faz-se $A_2^{'} = 0$. Impondo essa restrição as duas equações anteriores, tem-se o braço estável do equilíbrio de ponto de sela:

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda}_2 + \left(\frac{\mu_1 - w_{11}}{w_{12}}\right)(k(t) - \tilde{k}),$$

onde o coeficiente angular desta reta é negativo, pois $w_{11} > 0$, $w_{12} > 0$, $\mu_1 < 0$.

O braço instável é obtido substituindo a raiz estável μ_1 pela raiz instável μ_2 na equação da reta anterior. Assim,

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda}_2 + \left(\frac{\mu_2 - w_{11}}{w_{12}}\right)(k(t) - \tilde{k}).$$

O coeficiente angular da reta do braço instável é positivo, pois pela propriedade dos autovalores, $\left(\frac{\mu_2 - w_{11}}{w_{12}}\right) = \left(\frac{-\tilde{\lambda}(1-\beta)w_{21}}{\mu_2 + \tilde{\lambda}(1-\beta)w_{22}}\right) > 0$ dado que $w_{21} < 0$, $w_{22} > 0$ e $\mu_2 > 0$.

Para se obter as trajetórias de $k(t)$ e $\lambda(t)$ têm-se que determinar as constantes A_1, A_2 e $A_1^{'}$ já que $A_2^{'} = 0$. Neste sentido, fazem-se mais duas hipóteses adicionais: a primeira é que o estoque de capital inicial (data t=0) seja igual ao seu estoque de capital de estado estacionário inicial, ou seja, $k(0) = \tilde{k}_1$; a segunda é que na data de mudança da política (t=T) haja continuidade das soluções, ou seja, as soluções têm que serem iguais neste período de tempo.

Em assim sendo, fazendo uso da primeira hipótese, $k(0) - \tilde{k}_1 - \tilde{k}_1 + A_1 + A_2$ implicando $A_1 + A_2 = 0$ ou $A_1 = -A_2$. A segunda hipótese dá origem ao seguinte sistema de equações:

$$(A_1^{'} - A_1)\left(\frac{\mu_1 - w_{11}}{w_{12}}\right)e^{\mu_1 T} + A_2\left(\frac{\mu_2 - w_{11}}{w_{12}}\right)e^{\mu_2 T} = \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1$$

$$(A_1^{'} - A_1)e^{\mu_1 T} + A_2 e^{\mu_2 T} = \tilde{k}_2 - \tilde{k}_1$$

Portanto, a solução do sistema acima além de utilizar a restrição $A_1 = -A_2$ produz as seguintes soluções:

$$A_1 = \frac{e^{\mu_1 T}\left[\left(\frac{\mu_1 - w_1}{w_{12}}\right)(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1) - (\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_2)\right]}{\Delta}$$

$$A_1^{'} = \frac{e^{\mu_1 T}\left[\left(\frac{\mu_1 - w_1}{w_{12}}\right)(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1) - (\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)\right] + e^{\mu_2 T}\left[(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_2) - \left(\frac{\mu_2 - w_{11}}{w_{12}}\right)(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1)\right]}{\Delta}$$

onde, $\Delta = e^{(\mu_1+\mu_2)T}\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{w_{12}}\right) > 0$.

Portanto, substituindo A_1, A_2 e A_1' nas expressões de $k(t)$ e $\lambda(t)$ em cada um dos períodos $0 \leq t < T$ e $t \geq T$, determina-se completamente as trajetórias de $k(t)$ e $\lambda(t)$.

Na solução deste tipo de modelo, em geral, admite-se que uma das variáveis possa "saltar" a cada nova medida anunciada pelo governo e que a outra evolua continuamente no tempo. No caso deste artigo esta variável será utilidade marginal da riqueza $\lambda(t)$. A variável $k(t)$ será a variável predeterminada, ou seja, a variável que evolui continuamente no tempo.

Para calcular a dimensão desse salto basta fazer *t*=0 na equação de $\lambda(t)$ para o período $0 \leq t < T$ observando que $A_1 = -A_2$. Em o fazendo assim, encontra-se que:

$$\lambda(0) = \tilde{\lambda}_1 + A_2\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{w_{12}}\right).$$

Substituindo o valor de A_2 nesta última expressão obtém-se a expressão para o salto de $\lambda(t)$:

$$\lambda(0) - \tilde{\lambda}_1 = e^{-\mu_2 T}[(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1) - \left(\frac{\mu_1 - w_1}{w_{12}}\right)(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1)]$$

Independente do sinal da expressão entre chaves da equação anterior, quanto maior o tempo T, isto é, quanto mais distante ocorrer a mudança de política anunciada menor deverá ser o salto de $\lambda(t)$.

No caso em que a mudança de política se dá de imediato (hoje), ou seja, ela é não antecipada pelos agentes, o salto de $\lambda(t)$ é calculado fazendo-se *T*=0. Em assim sendo, tem-se que:

$$\lambda(0) = \tilde{\lambda}_2 - \left(\frac{\mu_1 - w_1}{w_{12}}\right)(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1),$$

que é justamente a expressão do braço estável. Ou seja, quando o anúncio de política é não antecipado $\lambda(t)$ salta de imediato para a reta do braço estável do equilíbrio de ponto de sela.

A característica essencial das soluções nestes modelos é que a dinâmica envolve três fases. O anuncio hoje de que a política econômica irá se alterar no tempo futuro T gera de imediato um salto em $\lambda(t)$. A intensidade deste salto será menor quanto mais distante ocorrer a mudança de política. Em seguida, essas variáveis seguem trajetórias instáveis até encontrarem o braço estável do equilíbrio de ponto de sela no período T. A partir desse ponto essas variáveis seguem sobre o braço estável até alcançar o novo equilíbrio de estado estacionário.

Quando o anuncio de mudança de política e sua implementação é feita de imediato, a utilidade marginal da riqueza salta de imediato para o braço estável para posteriormente $k(t)$ e $\lambda(t)$ seguirem suas trajetórias através do braço estável para o novo equilíbrio de estado estacionário.

4. SOLUÇÃO FORMAL DA EQUAÇÃO $\dot{P}(t) - r(t)P(t) = -1$ OLHANDO PARA O FUTURO

A solução geral dessa equação diferencial é dada pela seguinte expressão:

$$P(t) = e^{\int_0^t r(\tau)d\tau} A - \int_0^t e^{-\int_0^s r(s)ds} ds$$

onde A é uma constate a ser determinada. A fim de que essa constante seja endogenamente determinada Sargent e Wallace (1973) propuseram que ao invés de se usar a condição inicial se usasse a condição terminal. Essa última condição é que o nível de preço permaneça limitado quando $t \to \infty$. Para isso, tem-se que ter:

$$A = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\int_0^s r(s)ds} ds = \int_0^\infty e^{-\int_0^s r(s)ds} ds.$$

Substituindo esse último resultado na expressão para $P(t)$, encontra-se que:

$$P(t) = e^{\int_0^t r(\tau)d\tau} \left[\int_t^\infty e^{-\int_0^s r(w)dw} ds\right] = \int_t^\infty e^{-\int_t^s r(w)dw} ds.$$

Desde que $R(t) = \frac{1}{P(t)}$, finalmente encontra-se que:

$$R(t) = \frac{1}{\int_t^\infty e^{-\int_t^s r(w)dw} ds}.$$

5. SOLUÇÕES EXPLÍCITAS PARA AS VARIÁVEIS ENDÓGENAS DO MODELO

Proposição 1 *Suponha que estejam satisfeitas as condições* (18) – (20). *Então*:

f) $l(0) = \left[\dfrac{s_0}{\beta A k_0^{\delta}((1-\alpha)\bar{g})^{\eta}}\right]^{\frac{1}{1-\delta}}$;

g) $c(0) = \dfrac{\gamma(1-\delta)s_0}{\beta(1-\gamma)} \dfrac{1-l(0)}{l(0)}$;

h) $\tilde{c} = \dfrac{\tilde{s} - \beta\bar{g}}{\beta}$;

i) $\tilde{l} = \dfrac{(1-\gamma)(\tilde{s}-\beta\bar{g})}{(1-\gamma)(\tilde{s}-\beta\bar{g})+\gamma(1-\delta)(1-\beta)\tilde{s}}$;

j) $\tilde{k} = \dfrac{(1-\beta)\delta\tilde{s}}{\rho\beta}$.

Demonstração:

a) Em $t=0$, tem-se

$$\beta A k_0^{\delta} l(0)^{1-\delta}((1-\alpha)\bar{g})^{\eta} = s_0 \qquad \text{(A.1)}$$

Resolvendo A.1 para $l(0)$, obtém-se o resultado desejado.

b) Usando as especificações dadas à função utilidade e à tecnologia, as equações (5) e (6) podem ser escritas como:

$$\gamma c^{\lambda(1-\sigma)-1}(1-l)^{(1-\lambda)(1-\sigma)} = \lambda \qquad \text{(A.2)}$$

$$(1-\gamma)c^{\gamma(1-\sigma)}(1-l)^{(1-\gamma)(1-\sigma)-1} = \lambda(1-\delta)Ak^{\delta}l^{(1-\delta)-1}((1-\alpha)\bar{g})^{\eta} \qquad \text{(A.3)}$$

Combinando (A.2) e (A.3) em $t=0$ e usando a definição de y, tem-se

$$\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\frac{l(0)c(0)}{1-l(0)} = (1-\delta)y(0) \qquad \text{(A.4)}$$

O resultado fica demonstrado usando a suposição de que $y(0) = s_0/\beta$ e o item a) na equação (A.4).

Sob as condições do enunciado, as condições de primeira ordem (5) e (6) junto com as equações que descrevem o estado estacionário da economia, produzem o seguinte sistema:

$$(1-\beta)\tilde{y} = \tilde{c} + \bar{g}$$

$$(1-\beta)\delta\tilde{y} = \rho\tilde{k}$$

$$\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\frac{\tilde{l}\tilde{c}}{1-\tilde{l}} = (1-\beta)(1-\delta)\tilde{y}$$

$$\tilde{y} = \frac{\tilde{s}}{\beta}$$

A solução do sistema acima resulta nos itens c), d) e e) da Pproposição.

6. CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM DO PROBLEMA (18)

Por definição, as condições de primeira ordem para α e β no problema (18), determinam, respectivamente, que:

$$\tau\frac{\partial U(0)}{\partial\alpha} + (1-\tau)\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\alpha} = 0 \qquad \text{(A.5)}$$

$$\tau\frac{\partial U(0)}{\partial\beta} + (1-\tau)\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\beta} = 0 \qquad \text{(A.6)}$$

Portanto, a fim de estabelecer as equações (20) e (21), é suficiente encontrar as derivadas indicadas em (A.5) e (A.6).

Usando a expressão para $U(0)$, tem-se que:

$$\frac{\partial U(0)}{\partial \alpha} = \left[\frac{\gamma(1-\delta)}{\beta(1-\gamma)}\right]^{\gamma(1-\sigma)} s_0^{-\frac{\gamma\delta(1-\sigma)}{1-\delta}}$$

$$\frac{\frac{1-\sigma}{1-\delta}\left[\phi(\alpha)^{\frac{1}{1-\delta}} - s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{-\sigma} \phi(\alpha)^{\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\delta}-1} \phi'(\alpha)\left[\gamma\phi(\alpha)^{\frac{1}{1-\delta}} + (1-\gamma)s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]}{\phi(\alpha)^{2\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\delta}}} + \frac{\varphi}{\alpha}$$

É fácil verificar que $\phi'(\alpha) = -\eta\phi(\alpha)/(1-\alpha)$. Usando este fato na expressão acima, chega-se a:

$$\frac{\partial U(0)}{\partial \alpha} = -\left[\frac{\gamma(1-\delta)s_0}{\beta(1-\gamma)}\right]^{\gamma(1-\sigma)}$$

$$\frac{\frac{\eta(1-\sigma)}{1-\delta}\left[\phi(\alpha)^{\frac{1}{1-\delta}} - s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{-\sigma}\left[\gamma\phi(\alpha)^{\frac{1}{1-\delta}} + (1-\gamma)s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]}{(1-\alpha)\phi(\alpha)^{\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\delta}}} + \frac{\varphi}{\alpha} \qquad \text{(A.7)}$$

Por outro lado:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \alpha} = \frac{\varphi}{\alpha} \qquad \text{(A.8)}$$

Substituindo (A.7) e (A.8) em (A.5), obtém-se a equação (20).
Procedendo da mesma forma com respeito a β, obtém-se:

$$\frac{\partial U(0)}{\partial \beta} = -\gamma\beta^{-1}\left[\frac{\gamma(1-\delta)}{\beta(1-\gamma)}\right]^{\gamma(1-\sigma)} s_0^{-\frac{\gamma\delta(1-\sigma)}{1-\delta}} \frac{\left[\phi(\alpha)^{\frac{1}{1-\delta}} - s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{1-\sigma}}{\phi(\alpha)^{\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\delta}}} \qquad \text{(A.9)}$$

Semelhantemente, tem-se que:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \beta} = -\frac{\gamma(1-\sigma)(1-\gamma)^{(1-\gamma)(1-\sigma)}}{(1-\sigma)}\beta^{-\gamma(1-\sigma)}\frac{(\tilde{s}-\beta\overline{g})^{(1-\sigma)}}{\left[(1-\gamma)(\tilde{s}-\beta\overline{g})+\gamma(1-\delta)(1-\beta)\tilde{s}\right]}+$$

$$+\frac{(1-\gamma)^{(1-\gamma)(1-\sigma)}}{(1-\sigma)}\beta^{\gamma(1-\sigma)}(1-\sigma)(\tilde{s}-\beta\overline{g})^{-\sigma}\left[(1-\sigma)(\tilde{s}-\beta\overline{g})+\delta\sigma(1-\beta)\tilde{s}\right]^{(1-\gamma)(1-\sigma)-1}\times$$

$$\times\frac{\left\{\left[(1-\gamma)\delta\sigma\tilde{s}-\gamma(1-\sigma)\overline{g}\right](\tilde{s}-\beta\overline{g})-\delta\sigma(1-\beta)\tilde{s}\overline{g}\right\}}{\left[(1-\sigma)(\tilde{s}-\beta\overline{g})+\delta\sigma(1-\beta)\tilde{s}\right]^{2(1-\gamma)(1-\sigma)}}$$

(A.10)

Substituindo-se (A.9) e (A.10) em (A.6), obtém-se, após algumas manipulações algébricas, a equação (21).

7. PROPOSIÇÃO 2

Proposição 2 *Se* $\eta > \left[((1-\gamma)/\gamma)^{\gamma(1-\sigma)}\right]/\tau(1-\sigma)$ e $l(0) > (0{,}5)^{1-\delta}$, então $\hat{\alpha} < 0{,}5$.

Demonstração:

É suficiente demonstrar que, nas condições do enunciado, o lado esquerdo de (20) é maior do que um. Inicialmente observe que o termo

$$\left[\frac{\tau\eta(1-\sigma)}{(1-\delta)}\right]\left[\frac{\gamma(1-\delta)s_0}{\hat{\beta}(1-\gamma)}\right]^{\gamma(1-\sigma)}$$

é maior do que um. Isso decorre da suposição $\eta > \left[((1-\gamma)/\gamma)^{\gamma(1-\sigma)}\right] / \tau(1-\sigma)$ e do fato que $s_0 / \beta = y_0 > 1$. Assim, o resultado fica estabelecido se for demonstrado que:

$$\frac{\left[\phi(\hat{\alpha})^{\frac{1}{1-\delta}} - s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{-\sigma}\left[\gamma\phi(\hat{\alpha})^{\frac{1}{1-\delta}} + (1-\gamma)s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]}{\phi(\hat{\alpha})^{\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\delta}}} > 1$$

Suponha, por absurdo, que a afirmação não seja válida. Neste caso tem-se:

$$\left[\gamma\phi(\hat{\alpha})^{\frac{1}{1-\delta}} + (1-\gamma)s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right] \leq \left[\phi(\hat{\alpha})^{\frac{1}{1-\delta}} - s_0^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{\sigma}\phi(\hat{\alpha})^{\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\delta}} \qquad \text{(A.10)}$$

Como $l(0) < 1$, pode-se mostrar, facilmente que $\phi(\hat{\alpha}) > s_0$. Neste caso, após manipulações, a desigualdade em (A.10) pode ser reescrita como:

$$s_0^{\frac{1}{1-\delta}} < \left[1 - \left(\frac{s_0}{\phi(\hat{\alpha})}\right)^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{\sigma}\phi(\hat{\alpha})^{\frac{1-\gamma(1-\sigma)}{1-\delta}}$$

ou ainda:

$$\left(\frac{s_0}{\phi(\hat{\alpha})}\right)^{\frac{1}{1-\delta}} < \left[1 - \left(\frac{s_0}{\phi(\hat{\alpha})}\right)^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{\sigma}\phi(\hat{\alpha})^{-\frac{\gamma(1-\sigma)}{1-\delta}} \qquad \text{(A.11)}$$

Note que $s_0 / \phi(\hat{\alpha}) = l(0)$, portanto a equação (A.11) pode ser reescrita como:

$$l(0)^{\frac{1}{1-\delta}} < \left[1 - l(0)^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{\sigma}\phi(\hat{\alpha})^{-\frac{\gamma(1-\sigma)}{1-\delta}} \qquad \text{(A.12)}$$

Para $\sigma < 1$, é evidente que $\left[1 - l(0)^{\frac{1}{1-\delta}}\right]^{\sigma} < 1 - l(0)^{\frac{1}{1-\delta}}$, portanto a equação (A.12) implica que:

$$\frac{l(0)^{\frac{1}{1-\delta}}}{1 - l(0)^{\frac{1}{1-\delta}}} < \phi(\hat{\alpha})^{-\frac{\gamma(1-\sigma)}{1-\delta}}$$

Dadas as condições da Proposição e usando a definição de $\phi(\alpha)$, concluí-se que:

$$1 < \frac{l(0)^{\frac{1}{1-\delta}}}{1 - l(0)^{\frac{1}{1-\delta}}} < \phi(\hat{\alpha})^{-\frac{\gamma(1-\sigma)}{1-\delta}} < 1$$

A contradição acima estabelece o resultado desejado.