

Previsão do equity premium por meio da combinação dinâmica de modelos fatores

Rafael B. Barbosa

Professor de Economia da Universidade Federal do Ceará (UFC/DEA)

Thibério Mota da Silva

Doutorando em Economia na Universidade Federal do Ceará (CAEN/UFC)

Roberto T. Ferreira

Professor de Economia da Universidade Federal do Ceará (UFC/CAEN/DEA)

[VERSAO 1.2 MARÇO/17]

RESUMO

Este artigo avalia o poder de previsão sobre o equity premium do índice S&P 500 por meio de modelos fatoriais ponderados dinamicamente. Os fatores são extraídos de uma base de dados contendo 135 variáveis, contendo variáveis financeiras e macroeconômicas. Os fatores estimados são combinados por meio do algoritmo *Dynamic Model Average* (DMA) que utiliza técnicas bayesianas com janelas exponenciais para ponderar dinamicamente os possíveis modelos. Este método permite a incorporação tanto da instabilidade nos parâmetros quanto a incerteza sobre a correta especificação da equação de previsão. Dos resultados verificou-se que o procedimento adotado apresenta maior previsibilidade sobre o excesso de retorno do que procedimentos tradicionais, seja considerando estimações *in-sample* ou previsões *out-of-sample*. Evidencia-se que variáveis reais possuem maior peso sobre a previsão do *equity premium*, enquanto variáveis financeiras apresentam comportamento mais assimétrico, destacando-se como melhor previsores em períodos de recessão. Além disso, a previsão gerada por este procedimento obteve ganhos econômicos superiores aos principais *benchmarks* do índice, como previsão com variáveis individuais, modelo fatorial simples, *kitchen sink*, modelo ponderado simples, entre outros.

Palavras chaves: Previsão, Modelos de Fatores, Combinação de Previsão, Equity Premium

ABSTRACT

This paper aims to investigate the forecastability of weighted factors models to equity premium of S&P 500. The factors are extracted from a dataset containing 135 variables, including macroeconomic and financial variables. We use the algorithm of Dynamic Model Average (DMA) to weight the estimated factors. The DMA apply bayesian methods with exponential window to obtain the best forecast model. It allows incorporate both instabilities in parameters and uncertainty about the correct forecast model. The results show that the procedure forecast better the equity premium than standard benchmarks, both at in-sample and out-of-sample analysis. Moreover, factors extracted from real variables receive greater weight than factor estimated from financial variables. The financial variables present more asymmetric behavior, being increasing their forecast power during recessions. At last, the forecast estimated by this procedure is more profitable than standard benchmarks models as individual models, factor models, kitchen sink and equal weight average models.

Key words: Forecast, Diffusion Index, Forecast Combination, Equity Premium

JEL: C1, C22, C52, C58

1. Introdução

O objetivo deste artigo é analisar o poder de previsão de variáveis macroeconômicas e financeiras sobre o excesso de retorno do índice S&P 500 assumindo a presença de incerteza quanto a especificação correta do modelo de previsão e potenciais instabilidades nos parâmetros estimados. Busca-se, portanto, verificar se o poder preditivo de variáveis macroeconômicas muda ao longo do tempo e se a incorporação da incerteza gera melhor desempenho frente a outros modelos.

A literatura tem encontrado diversas evidências de que os modelos de previsão do excesso de retorno são instáveis. Dentre as possíveis fontes de instabilidade estão as quebras estruturais ou mudanças de regime nas variáveis macroeconômicas e financeiras. Stock e Watson (2003), por exemplo, documentam a presença de instabilidade nos parâmetros de variáveis macroeconômicas. Outros autores encontram fortes evidências de quebras estruturais em séries financeiras, como Paye e Timmermann (2006), Rapach e Wohar (2005, 2006).

Estas instabilidades podem afetar significativamente o poder de previsão dos modelos. Rossi (2011) verifica que quebras estruturais podem ser a principal causa para a diferença de desempenho entre estimações *in-sample* e previsões *out-of-sample*. Goyal e Welch (2003, 2008) e Bossaerts e Hillion (199) verificam que este fenômeno ocorre na previsão do excesso de retorno, i. e, modelos que apresentam um bom desempenho *in-sample* apresentam baixo poder de previsão *out-of-sample*.

Um problema adicional documentado na previsão do *equity premium* refere-se a incerteza quanto a correta especificação do modelo de previsão. Pesaram e Timmermann (1995) identificaram a presença de incertezas na previsão do excesso de retorno. Eles mostraram que a estimação por OLS quando avaliada dinamicamente por meio de critérios de informação como o critério de Akaike, Schwarz e o \bar{R}^2 apresenta instabilidade. Eles também constataram que a incorporação da incerteza no modelo pode gerar ganhos em termos de poder de previsão.

Ang e Bekaert (2004) evidenciam uma redução da previsibilidade do *equity premium* após a década de 1990. Timmermann (2008), por sua vez, aponta que certas variáveis, em geral, possuem baixo poder de previsão sobre o excesso de retorno, entretanto, em períodos curtos de tempo o poder de previsão pode aumentar. Ambos resultados reforçam a ideia de que não existe um modelo com superior poder de previsão ao longo do tempo.

Alguns pesquisadores buscaram incorporar tanto a instabilidade nos parâmetros quanto a incerteza dos modelos em suas previsões. Cremers (2002) apresenta evidências de que a adoção de um único modelo de previsão não é ideal. De fato, ele utiliza métodos bayesianos de seleção que identificam uma variação temporal dos melhores modelos. Avramov (2002), por sua vez, lida com a incerteza do modelo de previsão por meio do método bayesiano de ponderação média (BMA). O autor documenta evidências de incerteza sobre o modelo ideal de previsão e que a sua incorporação gera previsões mais acuradas sobre o excesso de retorno.

Mais recentemente, Dangl and Halling (2012) utilizam métodos bayesianos de ponderação sobre variáveis individuais e documentam a presença de instabilidade nos parâmetros estimados e incerteza quanto a especificação do melhor modelo de previsão. Os autores mostram que tal procedimento possui maior poder de previsão sobre a média histórica do índice em momentos de recessão e especialmente após o choque do petróleo de 1974.

Uma limitação associada a estas abordagens refere-se a utilização de apenas algumas poucas variáveis econômicas e financeiras para especificar o modelo de previsão¹. O número reduzido de variáveis pode não ser suficiente para captar a mudança nos cenários macroeconômicos, gerando com isso previsões não adequadas. Recentemente alguns autores tem mostrado que variáveis extraídas de grandes bases de dados macroeconômicas e financeiras possuem elevado poder de previsão sobre o *equity premium*, como Ludvigson e Ng (2007, 2008), Rapach e Zhou (2013) entre outros. Este resultado indica que grandes bases de dados potencialmente possam identificar mais adequadamente a mudança nos cenários econômicos e com isso caracterizar melhor a mudança nos parâmetros e a incerteza quanto a correta especificação da equação de previsão.

Um motivo adicional para utilização de fatores que representem o comportamento macroeconômico deve-se a teoria de arbitragem de preços de Ross (1976). Segundo esta teoria, os ativos são apreçados de acordo com a importância de fatores macroeconômicos para o *equity premium*. Assim, realizar previsões baseadas em fatores econômicos adequa-se a teoria de Ross.

Entretanto, a complexidade da análise estatística aumenta significativamente ao se incorporar instabilidades e incerteza no modelo quando o número de variáveis cresce. Isso ocorre por que se n constitui o número de variáveis disponíveis, então o número de modelos possíveis é 2^n . À medida que n cresce a utilização de métodos de ponderação

¹Em geral, as variáveis utilizadas são aquelas que historicamente apresentaram resultados satisfatórios para prever o excesso de retorno, como: razão dividendo-preço (Campbell e Shiller (1988), Fama e French (1988, 1989), Cochrane (2008)), razão rendimento-preço (Campbell e Shiller (1988)), Book-to-market (Kothari e Shaken (1997)), taxa de juros nominais (Fama e Schwert (1977) e Ang e Bekaert (2007)), inflation (Campbell e Voulteenahe (2004)), razão dividendo-payout (Lamont (1998)), razão consumo-riqueza (Lettau e Ludvigson (2001)) entre outros.

como em Avramov (2002) e Dangl e Halling (2012) torna-se infactível².

Uma alternativa para lidar com existência de grandes bases de dados tem sido a utilização de modelos fatoriais. Estes modelos procuram reduzir a dimensão de grandes bases de dados a um número pequeno de fatores. Sendo X_{it} um painel em que $i = 1, \dots, N$ corresponde a N variáveis macroeconômicas ou financeiras e $t = 1, \dots, T$ a variação temporal. Assuma que X_{it} possua uma estrutura fatorial aproximada, isto é:

$$X_{it} = \lambda_i' F_t + e_{it} \quad (1)$$

Em que: F_t são chamados de fatores; λ_i são os fatores de carga e $e_{it} \sim N(0, \sigma^2)$ é o erro de aproximação de X_{it} por $\lambda_i' F_t$. A hipótese de que X_{it} possui uma estrutura fatorial implica que a dimensão de X_{it} poderá ser reduzida a $r \ll N$ fatores, em que cada fator representa uma parcela da variabilidade de X_{it} .

Modelos fatoriais tem ganhado bastante destaque na literatura financeira recentemente. Ludvigson e Ng (2007) mostram que os fatores estimados respondem por grande parte do variabilidade entre risco e retorno do S&P 500. Kelly and Pruitt (2015) propuseram uma nova forma de extração de fatores que empiricamente apresentou superior previsibilidade que o modelo estimado por OLS e por componentes principais. Por fim, Nelly et al (2014) comparam o poder de previsão de variáveis macroeconômicas com indicadores técnicos, ambos extraídos por meio de componentes principais. Os resultados mostram que a combinação dos fatores macroeconômicos e técnicos possui superior poder de previsão para o equity premium.

Apesar do sucesso de modelos fatoriais na previsão do *equity premium*, ainda não houve avanço para a incorporação da instabilidade nos parâmetros ou a incerteza quanto a especificação correta do modelo previsão diante de um grande número de potenciais previsores. O objetivo deste artigo é preencher esta lacuna.

Será utilizado o método de combinação dinâmica de modelos de previsão que lida tanto com a presença de instabilidade nos parâmetros quanto com a incerteza da equação de previsão. Este método, conhecido como DMA³, foi desenvolvido por Raftery et al (2010) e, posteriormente, foi aplicado para a previsão de dados econômicos por Koop Korobilis (2011, 2012), Beckmann e Schussler (2016), Caldeira et al (2015). Para agregar grandes base de dados macroeconômicas e financeiras serão estimados fatores, por meio do método de componentes principais (PCM)⁴ e estes irão compor a equação de previsão que será ponderada dinamicamente ao longo do tempo.

Adoção deste forma de estimar a equação de previsão permite obter informações bastante relevantes sobre a previsibilidade do excesso de retorno do S&P 500. Basicamente, duas serão as principais vantagens da adoção deste método. Primeiro, será possível identificar quais variáveis são mais relevantes para a previsão do *equity premium* ao longo do tempo. Dessa forma, o método proposto é capaz de indicar se em períodos de expansão (recessão) variáveis macroeconômicas são mais ou menos relevantes para a previsibilidade do que variáveis financeiras, por exemplo. Além disso, dado o sucesso dos modelos fatoriais, será possível inferir se a consideração de instabilidades e incertezas no modelo melhoram o poder de previsão.

Três importantes resultados foram evidenciados ao realizar este exercício empírico. Estes constituem a principal contribuição deste trabalho. Primeiro, o poder de previsão de modelos fatoriais, tanto em exercícios *in-sample* quanto *out-of-sample*, apresentam melhoras quando são considerados potenciais instabilidades nos parâmetros e incerteza no modelo. De fato, modelos que não assumem a instabilidade nos parâmetros evidenciam significativa diferença em termos de previsibilidade quando comparados a modelos que incorporam tanto instabilidade quanto incerteza. Além disso, houve ganhos em termos de acurácia quando comparados a *benchmarks* tradicionais do excesso de retorno⁵. Esses resultados são obtidos mesmo considerando fatores estimados por diferentes subconjuntos de variáveis.

Segundo, por meio da análise das probabilidades atribuídas aos fatores verifica-se que o peso de variáveis financeiras e macroeconômicas varia no tempo. Este resultado indica que a previsibilidade do excesso de retorno é mais fortemente afetada por variáveis macroeconômicas em determinados períodos e em outros por variáveis financeiras. De fato, variáveis financeiras apresentam forte instabilidade ao longo do tempo, especialmente durante períodos de recessão⁶.

Variáveis reais (produto, consumo, mercado de trabalho etc) possuem substancial estabilidade na previsão do excesso de retorno, especialmente durante os períodos de expansão. Já as variáveis nominais (preços, moeda, taxas de câmbio etc) são mais instáveis do que as variáveis reais. Em períodos de crise específicas, como a crise do Petróleo, em 1974, variáveis nominais dominam a previsão do *equity premium*.

²Para se ter a ideia, se $n = 30$, então existiriam 1073741824 possíveis modelos. Diante da possibilidade instabilidade nos parâmetros, cada um destes modelos poderia ter parâmetros diferentes em cada período de tempo, elevando substancialmente o número de candidatas.

³Singla proveniente do nome da técnica em inglês: *Dynamic Model Average*

⁴Para maiores detalhes sobre o método dos componentes principais, ver Stock e Watson (2002).

⁵Serão considerados aqui vários benchmarks. Entretanto, os principais são os modelos fatoriais sem a consideração da instabilidade/incerteza e a média histórica do excesso de retorno.

⁶As recessões aqui utilizadas são as classificadas pelo *National Bureau of Economic Research*

Por fim, verifica-se que a utilização das previsões utilizando modelos fatoriais que incorporam a instabilidade e incerteza produz ganhos significativamente superiores a média histórica e a outros *benchmarks* em termos monetários, especialmente em períodos de recessão da economia⁷. Períodos de expansão não apresentaram ganhos econômicos em relação a média histórica, com exceção dos modelos que utilizam apenas variáveis macroeconômicas.

Além desta introdução, este trabalho está dividido em mais quatro partes. Na seção seguinte é apresentado a estratégia econométrica adotada. Será discutido o método de ponderação do DMA e a forma de estimação dos fatores. Na seção três são apresentados os resultados do exercício *in-sample*, em que as previsões são realizadas considerando toda a amostra de uma única vez. São também discutidos nesta seção o peso dos fatores macroeconômicos e financeiros sobre a previsibilidade do *equity premium*. Na seção quatro são apresentados os resultados para o exercício *out-of-sample*. Discute-se também os ganhos financeiros da adoção de modelos que incorporam incerteza/instabilidade em relação a *benchmark*. Por fim, a seção cinco discute as principais conclusões deste trabalho.

2. Estratégia econométrica

Seja R_t o índice do S&P 500 no tempo t e r_f o retorno de um investimento livre de risco. Defina o excesso de retorno como: $r_t = R_t - r_f$. Assim, o excesso de retorno (ou *equity premium*), y_{t+1} é o retorno do índice entre o tempo t e $t + 1$ acima do retorno livre de risco. Ou seja, $y_{t+1} = (r_{t+1} - r_t)/r_t$.

A equação de previsão é dada por:

$$y_{t+1} = \alpha + \beta x_t + \epsilon_{t+1}$$

Em que: x_t é um conjunto de variáveis no tempo t que explicam o *equity premium* e ϵ_{t+1} é um termo de erro com média zero. O objetivo deste trabalho é verificar se a incorporação da incerteza quanto a correta especificação do modelo, i.e, qual o número de variáveis que devem compor x_t , e a possível presença de instabilidade nos parâmetros afeta o desempenho preditivo sobre o *equity premium*.

Para tal fim será utilizado um método de ponderação dinâmica das variáveis, conhecido por DMA, que permite que os parâmetros e o número de variáveis contidas nos modelos se modifiquem no tempo. Foi desenvolvido originalmente por Raftery *et al* (2010) e aplica um ponderamento dinâmico aos diversos modelos de previsão. Cada modelo é obtido de um processo recursivo de estado-espço que inclui uma janela exponencial para a incorporação dos dados.

Suponha x_t represente um conjunto de regressores, isto é, x_t é uma matriz de tamanho $T \times N$, em que: T é o tamanho da série temporal e N é o número de variáveis utilizadas como previsoers. Perceba que existem $2^N = k$ possíveis combinações de variáveis que geram previsões para y_t . Seja $y_{t+1|t}^{(k)}$ a previsão do equity premium um período à frente, considerando o conjunto de informação em t e o conjunto de variáveis que formam o k -ésimo modelo.

Raftery *et al* (2010) propuseram o seguinte filtro de Kalman para este problema:

$$y_{t+1|t}^{(k)} = x_t^{(k)} \beta_t^{(k)} + \epsilon_t^{(k)} \quad (2)$$

$$\beta_t^{(k)} = \beta_{t-1}^{(k)} + \eta_t^{(k)} \quad (3)$$

Em que a equação (2) representa a equação de espaço e a equação (3) é chamada de equação estado e $x_t^{(k)}$ é um subconjunto de x_t . O objetivo do DMA é estimar a dinâmica dos parâmetros ao longo do tempo levando em consideração a equação de transição do filtro de Kalman e, concomitantemente, combinar estes k modelos por meio de uma ponderação dinâmica. Para facilitar a exposição serão tratados separadamente a questão da estimação e da combinação de variáveis.

Sem perda de generalidade considere $k = 1$. Então, o filtro de Kalman pode ser escrito por:

$$y_{t+1|t} = \beta_t x_t + \epsilon_t \quad (4)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \eta_t \quad (5)$$

Em que: $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_{\epsilon t}^2)$, $\eta_t \sim N(0, \sigma_{\eta t}^2)$ e ϵ_t e η_t são não correlacionados. Considere as equações de transição $P_{t|t-1} = E \left[(\epsilon_t - \epsilon_{t|t-1}) (\epsilon_t - \epsilon_{t|t-1})' \right]$, $P_{t|t} = E \left[(\epsilon_t - \epsilon_{t|t}) (\epsilon_t - \epsilon_{t|t})' \right]$ e $G_{t|t-1} = E \left[(y_t - y_{t|t-1}) (y_t - y_{t|t-1})' \right]$,

⁷Este resultado se mantém mesmo assumindo perfil de risco diferentes para os agentes econômicos

em que: $\epsilon_{t|t-1}$ é o erro de previsão em t cometido utilizando o conjunto de informação em $t - 1$. Semelhantemente, $y_{t|t-1}$ corresponde a previsão de y_t considerando o conjunto de informação em $t - 1$.

Como ϵ_t se distribui normal, então, $\beta_{t|t-1} \sim N(\hat{\beta}_{t-1}, P_{t|t-1})$, em que:

$$P_{t|t-1} = P_{t-1|t-1} + \sigma_{\eta t} \quad (6)$$

A previsão utilizando este sistema de equações é realizada a cada período pela atualização tanto dos parâmetros estimados quanto das equações de transição.

Raftery *et al* (2010) propuseram uma forma computacionalmente mais simples para calcular (6), sem recorrer a métodos do tipo *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) que são computacionalmente intensivos. A sugestão dos autores foi considerar o erro na equação de transição como sendo $\sigma_{\eta t} = (\lambda^{-1} - 1) P_{t-1|t-1}$, em que: λ é chamado de fator de esquecimento. Pode-se escrever a equação de transição de $t - 1$ para t como o erro médio de previsão no período $t - 1$ ponderado por uma função de λ :

$$P_{t|t-1} = \frac{1}{\lambda} P_{t-1|t-1} \quad (7)$$

Se for assumido $0 < \lambda \leq 1$ então o fator de esquecimento sugere uma ponderação das observações que compõe $P_{t|t-1}$. Isto é, a j -ésima observação receberá peso λ^j . Por exemplo, supondo que a frequência da base de dados seja mensal, então a observação de cinco anos atrás, considerando um $\lambda = 0.99$, receberá apenas 55% do peso⁸ sobre $P_{t|t-1}$. A Figura 1 mostra o efeito exponencial da ponderação sobre as variáveis considerando 100 observações assumindo os valores do $\lambda = \{0.80; 0.95; 0.99\}$. Percebe-se que quanto menor o λ então, maior será o peso atribuído as observações mais recentes.

Esta forma de especificação de (6) foi originalmente analisada por Fagin (1964) e Jazwinsky (1970). Existem duas vantagens nesta abordagem. Primeiro, não é necessário recorrer a métodos computacionais pesados, como o MCMC. Segundo, a ponderação exponencial das observações produz uma janela móvel que atribui mais peso a observações mais recentes. Desta forma, apenas as instabilidades mais recentes são incorporadas nas previsões, enquanto que o efeito de instabilidades passadas perdem relevância com o passar do tempo. Esta última observação é adequada as características de choques econômicos e financeiros sobre as variáveis econômicas⁹.

A previsão é completada por meio da equação de atualização, em que:

$$\beta_{t|t} \sim N(\hat{\beta}_t, P_{t|t}) \quad (8)$$

Onde:

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta}_{t-1} + P_{t|t-1} x_t H_t^{-1} (y_t - x_t \hat{\beta}_{t-1}) \quad (9)$$

e

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} x_t H_t^{-1} x_t P_{t|t-1} \quad (10)$$

Em que: $H_t = \sigma_{\epsilon t} + x_t P_{t|t-1} x_t'$. A previsão é feita recursivamente e atualizada a cada período pelas equações (9) e (10). Portanto, a distribuição da previsão possui média $x_t \hat{\beta}_{t-1}$ e variância H_t , $y_{t|t-1} \sim N(x_t \hat{\beta}_{t-1}, H_t)$. O mesmo procedimento é realizado para cada um dos k possíveis modelos de previsão.

Tendo analisado como a instabilidade nos parâmetros é estimada, considere agora o caso da combinação dos k potenciais modelos. Seja Θ_t seja o vetor de todos os k possíveis coeficientes no tempo t , isto é: $\Theta_t = (\beta_t^{(1)}, \dots, \beta_t^{(k)})$. O DMA busca atribuir um peso a cada previsão de $y_t^{(k)}$ no tempo t condicional a informação, já observada, sobre o comportamento da variável alvo no tempo $t - 1$, i.e, $E(y_t^{(k)} | y_{t-1})$.

Considere que cada previsão receba a probabilidade em cada período t , dada por: $p(L_t = k | y_{t-s})$. Este valor representa a probabilidade do modelo no tempo t ser k ($L_t = k$), condicional a ocorrência de y_{t-s} ¹⁰. O DMA, portanto, consiste na previsão ponderada de todos os possíveis modelos, com peso dado por $p(L_t = k | y_{t-s})$ e supondo um esquema recursivo de estimação.

$$E(y_t | y_{t-1}) = \sum_{i=1}^K p(M_{ti} | I_{t-1}) x_t^{(i)} \hat{\beta}_t^{(i)} \quad (11)$$

⁸Em cinco anos há 60 meses. Portanto, $0.99^{60} = 0.5471$.

⁹Ramey (2016) faz um levantamento das propriedades dos choques econômicos.

¹⁰De uma forma mais geral, pode-se considerar que tal probabilidade refere-se a probabilidade de ocorrer o modelo M_{ti} , $i = 1, \dots, k$ e $t = 1, \dots, T$, condicional ao conjunto informação I_{t-1} . Portanto, $P(L_t = k | y_{t-s}) = P(M_{ti} | I_{t-s})$

O problema consiste em determinar $p(M_{it}|I_{t-1})$, a probabilidade atribuída a cada modelo ao longo do tempo baseada no seu poder de previsão passado. Raftery *et al* (2010) propuseram um método para determinar $p(M_{it}|I_{t-1})$ que depende de um fator de esquecimento α , cuja interpretação é semelhante a λ . Assim,

$$P(M_{it}|I_{t-1}) = \frac{P(M_{it}|I_{t-1})^\alpha}{\sum_{j=1}^J P(M_{jt}|I_{t-1})^\alpha} \quad (12)$$

A atualização da ponderação do modelo é realizada pela Regra de Bayes, em que:

$$P(M_{it}|I_{t-1}) = \frac{p(y_t|M_{it}, I_{t-1})P(M_{it}|I_{t-1})}{\sum_{j=1}^J p(y_t|M_j, I_{t-1})P(M_{jt}|I_{t-1})}$$

em que: $p(y_t|M_{it}, I_{t-1})$ é a densidade preditiva do modelo i . Pode-se escrever a equação (12) como:

$$\begin{aligned} P(M_{it}|I_{t-1}) &\propto [P(M_{it}|I_{t-2})p(y_{t-2}|M_{it}, I_{t-2})]^\alpha \\ &= \prod_{s=1}^{t-1} p(y_s|M_{it}, I_{t-s-1})^{\alpha^s} \end{aligned} \quad (13)$$

A forma de ponderação proposta por Raftery *et al* (2010) possui a vantagem de não requerer uma matriz de transição entre cada um dos modelos ao longo do tempo, o que torna o problema de estimação computacionalmente mais simples. Assim, modelos que tenham realizado boas previsões no passado recente recebem maior peso para a previsão do período atual.

A noção de passado recente depende do parâmetro de esquecimento α . Este atribui ponderação exponencial ao passado, de maneira similar ao fator de esquecimento λ . Note que se $\alpha = 1$, então a forma de ponderação passa a obedecer apenas a atualização pela regra de Bayes, gerando, portanto, uma previsão bayesiana ponderada (BMA). Por outro lado, se $\alpha = 0$, então a ponderação atribui igual peso a todos os modelos, sendo então um modelo com igual ponderação.

O DMA por sua vez, assume que $0 < \alpha \leq 1$. O tamanho ótimo da janela exponencial, λ , dependerá da frequência dos dados e da escolha de α . Escolhas recomendadas por Koop e Korobilis (2012) e por Raftery *et al* (2010) são $\alpha, \lambda = \{0.95; 0.99\}$. Estes serão os *benchmarks* aqui utilizados, ou seja, o par (α, λ) assumirá valores no conjunto $\mathcal{O} = \{(0.95; 0.95), (0.95, 0.99), (0.99, 0.95), (0.99, 0.99)\}$.

Visando a utilização de um grande conjunto de informações macroeconômicas e financeiras, este trabalho terá como variáveis explicativas em (2) fatores extraídos de um painel de dados X_{it} contendo N ($i = 1, \dots, N$) variáveis macroeconômicas e financeiras dispostas em T ($1, \dots, T$) períodos. Assuma que X_{it} possua uma representação fatorial como em (1). É possível representar (1) na forma matricial: ,

$$\underset{(T \times N)}{X} = \underset{(T \times r)}{F} \underset{(r \times N)}{\Lambda'} + \underset{(T \times N)}{e} \quad (14)$$

Em que: $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{iT})'$, $X = (X_1, \dots, X_T)'$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)'$, $F_t = (F_1, \dots, F_T)'$, $e_i = (e_{i1}, \dots, e_{iT})'$ e $e = (e_1, \dots, e_N)'$.

Os fatores estimados são aqueles obtidos ao se minimizar a seguinte soma dos quadrados dos resíduos, *SSR*:

$$SSR = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T (X_t - \Lambda F_t)' (X_t - \Lambda F_t) \quad (15)$$

sujeito as restrições de identificação: $F_t' F_t / T = I_r$ e $\Lambda' \Lambda = diagonal$.

Os fatores estimados são os maiores autovalores associados aos autovetores da matriz (15)¹¹. O procedimento de estimação assume exista um número ideal de fatores conhecido a priori, embora, na prática este número seja estimado por algum critério de informação. Aqui será adotado para indicar o número ideal de fatores o critério de informação desenvolvido por Bai e Ng (2002).

Entretanto, note que o critério de Bai e Ng (2002) apenas fornecerá um número máximo de fatores que são extraídos de X_{it} . Não necessariamente todos os fatores serão utilizados em todos os períodos na equação de previsão, pois, em determinados períodos o DMA pode atribuir peso zero a um fator específico.

¹¹Existem outras formas de extrair os fatores. Para uma discussão mais detalhada dos métodos de estimação de modelos fatoriais Stock e Watson (2010, 2016) apresentam excelentes revisões.

Koop e Korobilis (2011), KK, propuseram utilizar fatores estimados pelo método de componentes principais como variáveis explicativas no DMA. Eles extraíram os fatores de blocos de variáveis macroeconômicas comuns (bloco de variáveis de preço, de produto, de taxa de câmbio, etc). De cada bloco era extraído um único fator que posteriormente era inserido no DMA. Por meio da análise das probabilidades estimadas de cada modelo era possível identificar em qual período os fatores adquiriam maior peso sobre a previsão da variável alvo.

Esta abordagem apesar de ser bastante informativa não é inteiramente adequada para previsão *out-of-sample*, por dois motivos principais. Primeiro, Bai (2008) demonstrou que o erro de estimação dos fatores não seria prejudicial a previsão se $N, T \rightarrow \infty$ e $\sqrt{N}/T \rightarrow \infty$. Isso decorre do fato de que à medida que $N \rightarrow \infty$, a variação em ϵ_{it} passa a ser dominada pela estrutura $\lambda_i' F_t$, possibilitando a aproximação de X_{it} por meio de $\hat{\lambda}_i' \hat{F}_t$. O procedimento adotado por KK não parece adequado, pois reduz N para a extração de fatores, possivelmente gerando uma aproximação imprecisa. Adicionalmente, estimar fatores utilizando blocos de variáveis desconsidera a possível interdependência entre as variáveis de diferentes blocos. A existência de correlação fraca entre as variáveis é adequada para dados econômicos e requerida para problema que envolvam inferência sobre os fatores estimados¹².

Neste trabalho será utilizada a abordagem KK pois, apesar das limitações, possui significativo poder interpretativo. Entretanto, em exercícios *out-of-sample*, outras especificações para o conjunto de dados serão assumidas, de forma a explorar melhor o poder de previsão dos modelos fatoriais.

2.1 Extensões

A estimação de modelos fatoriais reduz um grande conjunto de dados de tamanho $N \times T$ a alguns $r \ll N$ fatores. Uma questão importante é saber quais variáveis devem estar contidas nesse grande conjunto de dados para que as estimativas sejam eficientes.

Boivin e Ng (2006) apresentaram evidências empíricas da existência de subconjuntos de N que proporcionam estimações mais eficientes. Os autores buscaram selecionar este subconjunto por meio da correlação entre as variáveis alvo da previsão e as variáveis contidas na base de dados. Bai e Ng (2008) propuseram métodos de seleção de variáveis através de *hard* e *soft thresholds*. No primeiro caso, as variáveis são selecionadas utilizando critérios de informação como o de Akaike (AIC) e o Bayesiano (BIC). No segundo caso, são aplicados métodos de regularização como o LASSO (*Least Absolute Selector and Shrinkage Operator*) e o LAR (*Least Angle Regression*)¹³ para selecionar previamente as variáveis.

De certa forma, esses métodos buscam corrigir uma limitação dos modelos fatoriais. Modelos fatoriais, quando aplicados em versão tradicionais, encontram estimativas que não levam em consideração as variáveis que serão previstas. Isto é, os fatores estimados serão os mesmos independentes se o objetivo é prever variáveis financeiras, como neste trabalho, ou variáveis reais, como o PIB, por exemplo. Na literatura estatística, tal procedimento para a estimação dos fatores é chamada de fatores não supervisionados, ver Hastie et al (2012).

Bair et al (2006) foi o pioneiro em propor métodos fatoriais supervisionados, isto é, modelos fatoriais cujos fatores levam em consideração no processo de estimação as variáveis que serão previstas. Outras técnicas de supervisão tem sido propostas. Tu e Lee (2014), por exemplo, propuseram selecionar os fatores de uma base de dados transformada. Esta base de dados é obtida pela estimação da influência de cada variável contida em X_{it} sobre a variável alvo da previsão. Este método foi chamado de Componentes Principais usando Combinação de Previsões (CFPC¹⁴). Boldrini e Hillenbrand (2015) e Giovannelli e Proietti (2014) também propuseram métodos alternativos de supervisão de fatores.

Para os propósitos deste artigo, o DMA usando fatores será ampliado para o caso supervisionado por meio ou da pré-seleção de variáveis através dos métodos do LASSO e do LAR ou por meio da supervisão pelo CFPC. O objetivo é verificar se o poder de previsão pode ser melhorado caso seja empregado este tipo de supervisão dos fatores, obtida ou pela prévia redução do número de observações contidas em X_{it} ou pela extração dos fatores de uma base de dados transformada.

No caso do método de seleção do Lasso as variáveis serão selecionadas buscando minimizar o erro quadrático médio condicionado a uma restrição normada L_1 , isto é:

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \beta X_{it})^2 + \lambda |\beta|$$

Em que: β é um vetor de coeficientes a ser estimado de tamanho $N \times 1$, λ é chamado de parâmetro de

¹²Ver Bai e Ng (2002) e Bai (2003).

¹³O método do Lasso foi proposto originalmente por Tibsharani (1996) e o método do Lar foi desenvolvido por Efron et al (2002)

¹⁴Sigla original do inglês.

tunning que mensura a sensibilidade da seleção e $|\beta| = \sum_{i=1}^N \beta_i$. O parâmetro de *tunning* será selecionado por meio de validação cruzada. O método do Lasso promove a seleção de variáveis ao atribuir a variáveis irrelevantes o coeficiente estimado igual a zero.

Outra forma de seleção de variáveis é o método do *Least Angle Regression* (LAR) que foi proposto inicialmente por Efron *et al* (2004) como um método de seleção de variáveis similar ao *Forward Stepwise Regression*¹⁵. Esta técnica, primeiramente, ordena as variáveis candidatas a participar do modelo de acordo com seu poder preditivo. Depois, seleciona, entre as variáveis melhor ranqueadas, um modelo parcimonioso e usa este para realizar a previsão. Em comparação com outros métodos de seleção, o LAR é considerado mais eficiente computacionalmente do que o LASSO. O algoritmo do LAR é mais rápido que outros procedimentos de *shrinkage* e possui previsão acurada em diferentes estruturas de dados¹⁶.

Por fim, o método do CFPC, desenvolvido por Tu e Lee (2014), primeiramente, regride cada uma das variáveis contidas em X_{it} sobre a variável alvo y_t . Após, para cada período de fora da amostra é realizada a previsão da variável alvo $\hat{y}_{i,t+h|t}$. Sobre a base de dados formada por todas essas previsões serão extraído os fatores.

Dessa forma, tem-se quatro possíveis especificações para o DMA usando fatores. A especificação não supervisionada, como apresentada na seção 2.1 (FDMA). As especificações supervisionadas: pré-seleção com o Lasso (Lasso-FDMA), pré-seleção com o LAR (Lar-FDMA) e a supervisão com o CFPC (CFPC-FDMA).

Diante da exposição anterior pode-se estabelecer a estratégia empírica adotada neste trabalho, que seguirá a seguinte sequência.

- i. De uma grande base de variáveis, contendo variáveis macroeconômicas ou financeiras, serão estimados os r fatores, $F_t = (F_t^1, \dots, F_t^r)$. Estes fatores podem ser obtidos pela forma tradicional de extração ou por meio de alguma das extensões que realizam um tratamento prévio da base de dados.
- ii. Os fatores estimados serão utilizados na equação de previsão em (2) que, por sua vez, será estimada recursivamente considerando todos os possíveis subconjuntos de F_t . Neste caso, existem 2^r possíveis modelos.
- iii. Para cada modelo será gerada a previsão para o *equity premium* e, baseando-se nas probabilidades associada a cada modelo de acordo com (13), as previsões serão combinadas;
- iv. Se o procedimento for a análise *in-sample*, então será utilizada a base de dados completa de $t = 1$ até T ;
- v. Se a análise for sobre o pseudo *out-of-sample*, então o procedimento de i. a iii. será realizado de $T = 1$ até t para gerar a previsão para $t + 1$. Posteriormente, a observação em $t + 1$ é incorporada a amostra *in-sample* e a previsão é gerada para $t + 2$. Este procedimento irá se repetir até que a previsão para todas os períodos da amostra *out-of-sample* seja realizada¹⁷.

3. Base de dados

A base de dados contém 111 variáveis macroeconômicas e 14 variáveis financeiras com frequência mensal entre 1961.10 até 2012.01, totalizando 623 observações. As variáveis macroeconômicas estão organizadas em sete grupos comuns, quais sejam: grupo produto, grupo consumo e orders, grupo preços, grupo monetário, grupo taxa de câmbio, grupo trabalho. Tais variáveis foram extraídas do banco de dados do *Federal Reserve of Saint Louis* (FRED)¹⁸.

Aqui será chamado de variáveis financeiras aquelas que foram apontadas na literatura empírica como bons previsões para o excesso de retorno do S&P 500. Estas variáveis foram sumarizadas em trabalhos como Goyal e Welch (2008) e posteriormente utilizadas em recentes trabalhos empíricos, como Rapach e Zhou (2012), Neely *et al* (2015), Ferreira e Santa-Clara (2012), Rapach, Strauss e Zhou (2010), entre outros. A Tabela 1 apresenta a descrição das variáveis financeiras utilizadas neste trabalho.

¹⁵*Forward Stepwise Regression* constrói um modelo por meio da adição de novas variáveis a cada processo de estimação. Após, cada novo conjunto de variáveis é utilizado para se realizar a previsão.

¹⁶Ver Efron *et al* (2004), Boveslud *et al* (2007), Saigo *et al* (2007), Gelper e Croux (2008).

¹⁷Se T é o tamanho da amostra e assumindo que a amostra *in-sample* seja de tamanho P , então a amostra *out-of-sample* é $R = T - P$, i. e, $R = P + 1, \dots, T$.

¹⁸Ver Ng e McCracken (2015) para maiores detalhes sobre a forma de extração.

Tabela 1: Variáveis Financeiras

| Símbolo | Nome da variável | Definição |
|---------|--|---|
| log_dp | Log da razão do dividendo-preço | log da soma móvel de 12 meses de dividendos pagos menos log do índice S&P 500. |
| log_dy | Log do dividendo-yield | log da soma móvel de 12 meses de dividendos pagos menos log do preço dos ativos |
| log_ep | log dos rendimentos-preço | log da soma móvel de 12 meses de dos ganhos sobre S&P 500 menos log do preço dos ativos |
| log_de | Log da razão do pagamentos de dividendos | log da soma móvel de 12 meses de dividendos pagos menos log da soma móvel de 12 meses de dos ganhos sobre S&P 500 |
| svar | Variância do índice | Soma mensal da variância dos retornos diários do S&P 500 |
| bm | razão do Book-to-market | razão do book-to-market para DJIA |
| ntis | Expansão líquida de ativos | razão da soma móvel de 12 meses dos ativos líquidos pelo índices de capitalização de mercado no fim do exercício listados no NYSE |
| T_bill | Treasury bill rate | interest rate sobre 3 meses do T-Bill (mercado secundário) |
| lty | Juros de longo prazo | Títulos do governo americano de longo prazo |
| ltr | Retorno de longo prazo | Retorno de longo prazo dos títulos do governo |
| ts | Estrutura a termo | taxa de juros de longo prazo menos taxa do T-bill |
| dfy | Default do spread da taxa de juros | Diferença entre corporate bond yields de empresas ranqueadas BAA- e AAA- |
| dfr | Default spread do retorno | Retorno de longo prazo do corporate bond menos retorno de longo prazo do títulos do governo |
| inf | Inflação | Inflação calculada a partir dos índices de preços ao consumidor CPI (all urban consumers) |

Notas: A tabela 1 descreve as variáveis utilizada no exercício empírico de previsão do excesso de retorno sobre o S&P 500. Toda a base de dados, assim como as rotinas utilizadas, encontram-se disponíveis desde que solicitadas por email aos autores.

Todas as variáveis macroeconômicas e financeiras foram estacionarizadas¹⁹ visando evitar que comportamentos não estacionários das variáveis dominem a variabilidade de X_{it} prejudicando, com isso, a representação fatorial da base de dados. A estacionariedade foi obtida por meio de transformações sobre as séries de variáveis. Estas transformações incluem: primeira diferença, aplicação do log, aplicação do log da primeira diferença, segunda diferença e aplicação do log da segunda diferença.

O procedimento para obter a estacionariedade foi realizado em duas etapas. Primeiro, é aplicado o teste de estacionariedade ADF. Em se verificando a não estacionariedade, aplica-se uma das transformações até obter a estacionariedade. Posteriormente, a estacionariedade é verificada por meio do teste KPSS. No apêndice encontra-se a descrição de todas as variáveis macroeconômicas bem como suas respectivas transformações.

4. Previsibilidade do excesso de retorno do S&P 500 dentro da amostra

Nesta seção será analisado o poder de previsão dos modelos fatoriais dinamicamente ponderados dentro da amostra, isto é, a amostra utilizada inicia-se em 1961.10 e termina em 2012.01. Esta seção está dividida em duas partes. Na primeira parte são discutidos os resultados para a probabilidade à posteriori estimada em três especificações diferentes. A segunda seção apresenta algumas estatísticas que permitem comparar o poder preditivo dentro da amostra com outros métodos de estimação.

4.1 Probabilidades à posteriori estimadas

Para verificar o peso de cada variável sobre a previsibilidade dentro da amostra do excesso de retorno do S&P 500 será analisado nesta seção as estimações das probabilidades à posteriori. Estas probabilidades, como já discutido, indicam o peso que cada variável possui sobre a previsão do excesso de retorno ao longo do tempo.

Três especificações diferentes serão consideradas. Primeira especificação, chamada de SP1-I, estimará um total de quatro fatores extraídos da amostra completa, isto é, incluindo variáveis macroeconômicas e financeiras. O

¹⁹A estacionarização das séries temporais não é uma condição para a estimação por meio de componentes principais. Esta tem sido, entretanto, uma prática usual na literatura empírica, ver, por exemplo, Stock and Watson (2002, 2012), Bai and Ng (2006, 2008), entre outros.

objetivo é verificar se existem períodos em que um ou outro fator adquire maior relevância, caracterizando, portanto, a existência de de incerteza sobre a equação de previsão.

A segunda especificação, chamada de SP2-I, separará a amostra em sete grupos de variáveis comuns no qual de cada grupo será extraído um único fator. A ideia deste exercício é verificar se o peso destes fatores estimados mudam ao longo do tempo, semelhante a estratégia de blocos de variáveis proposta por Koop and Korobilis (2011). Isto permitirá identificar quais fatores macroeconômicos ou financeiros tiveram maior relevância em diferentes períodos. Os sete grupos são: grupo produto, grupo consumo e orders, grupo preços, grupo monetário, grupo taxa de câmbio, grupo trabalho e por fim, grupo financeiro.

Por fim, a terceira especificação, SP3-I, buscará verificar se existe diferença de importância para a previsão do *equity premium* ao considerar variáveis reais, nominais e financeiras. Entre as variáveis reais incluem variáveis de produto, consumo e *orders* e mercado de trabalho. Já entre as variáveis nominais incluem-se as variáveis de preço, taxa de câmbio²⁰ e moeda. Esta especificação visa extrair os fatores por grupos de variáveis em que N seja grande, evitando possíveis perdas de eficiência.

As figuras 2 a 4 são apresentados as probabilidades à posteriori estimadas para cada especificação, respectivamente. Na análise da Figura 2 é possível notar que existe substancial instabilidade nos pesos de cada fator estimado. Por exemplo, o fator 2 é bastante sensível a períodos anteriores entre as crises do Petróleo na década de 1970. No período conhecido por Grande Moderação (1983.01 à 2008.01), há uma redução da variabilidade do peso dos fatores, embora ainda persista uma expressiva volatilidade. Para ilustrar este fato, o desvio padrão médio entre os quatro fatores entre 1970.01 à 1982.12 é de 0,10. No período da Grande Moderação, o desvio padrão médio reduz-se a 0,06. Adicionalmente, todos os fatores sofrem forte instabilidade durante a Grande Crise de 2008 com exceção do fator 4, que durante este período mantém sua previsibilidade sobre o excesso de retorno.

A Figura 3 apresenta os pesos dos fatores estimados adotando o procedimento de KK. Este procedimento separa a base de dados em blocos de variáveis comuns. Depreende-se do gráfico várias informações importantes. Primeiro, fatores extraídos de variáveis reais possuem relativa estabilidade sobre a previsão do excesso de retorno, especialmente durante a Grande Moderação. Embora tenha ocorrido um choque no produto durante a Grande Crise de 2008, os fatores extraídos do grupo consumo e trabalho mantiveram relativa estabilidade.

É importante notar que o que se afirma aqui é que o peso dado pelo DMA a fatores extraídos deste grupo comum de variáveis não se modificou durante a Grande Crise. Isto não significa afirmar que este fator não sofreu forte instabilidade no período, mas sim que a sua previsibilidade sobre o excesso de retorno não se alterou.

O bloco financeiro sofre vários choques ao longo do tempo e aparentemente adquire maior relevância em períodos de recessão. Por exemplo, durante a Grande Crise de 2008, o peso dado ao fator financeiro foi em média de 59,76%, enquanto que no período após a Grande Crise o peso mudou para 44,36%. Observe que as data de recessão da NBER consideram apenas recessões em variáveis reais. Isto implica que crises no mercado financeiro apenas serão contabilizadas como períodos de recessão se afetarem as variáveis reais (Ng e Wright (2013)). De certa forma isto explica o fato de volatilidade do bloco financeiro estar em desacordo com os períodos de recessão da NBER, como por volta de 1978 e 2005.

Ademais, durante períodos de recessão o bloco de variáveis financeiras adquirem maior poder de previsão sobre o *equity premium*. A única exceção é a recessão do início da década de 1990. Porém, nas demais recessões, o fator financeiro apresenta significativo aumento.

O fator preço e monetário são bastante instáveis, especialmente, em períodos de recessão. O fator preço é o que apresenta maior relevância durante o período do Choque do Petróleo na década de 1970. Por fim, o fator câmbio apresentou-se relativamente estável durante a Grande Moderação, porém sofrendo uma grande variação durante a Grande Crise de 2008.

Para melhor caracterizar o comportamento de cada grupo de variáveis sobre a previsibilidade do excesso de retorno a tabela 1 apresenta a média e o desvio padrão de cada fator ponderado pelas probabilidades à posteriori estimadas. A amostra foi dividida em três subperíodos: 1970.01 à 1982.12, período caracterizado por grandes crises, como a do Petróleo em 1974, e elevada inflação; 1983.01 à 2008.01, período da Grande Moderação, caracterizado por baixa inflação e baixa volatilidade nas variáveis macroeconômicas; por fim, 2008.02 à 2012.01, período posterior a Grande Crise de 2008.

Considerando toda a amostra de 1961.10 à 2012.01 os fatores reais possuem em média maior peso sobre a previsão do *equity premium*. Além disso, esses fatores ponderados apresentam menor variabilidade, mensurada pelo desvio padrão. O fator preço mostrou-se bastante relevante, embora tenha apresentado maior volatilidade no período. Os fatores taxa de câmbio e financeiros apresentaram menor relevância para previsibilidade do excesso de

²⁰ Alguns autores classificam as variáveis de câmbio como financeiras, por exemplo, Ludvigson and Ng(2006, 2008). Essa situação foi considerada nos exercícios empíricos, entretanto, não houve significativa mudança nos resultados. O apêndice na web... apresenta um exercício in-sample que inclui taxa de câmbio como variável financeira.

retorno. Todavia, o desvio padrão tenha sido o mais elevado para os dois blocos de variáveis.

Em períodos de maior instabilidade os fatores financeiros ganham destaque na previsão do *equity premium*. Este resultado pode ser visualizado ao considerar a amostra 1970.01 à 1982.12, que é marcada por períodos de recessão. O fator financeiro foi o que apresentou maior peso médio e maior desvio padrão neste período. As outras variáveis não se modificaram em relação a amostra completa.

Ao se analisar o período entre 1983.01 à 2008.01, caracterizado pela Grande Moderação, o fator financeiro perde importância, embora ainda seja o mais volátil. Chama a atenção a redução do desvio padrão das variáveis reais neste período, apesar de o peso médio ter variado pouco. Após a Grande Crise de 2008 o fator financeiro volta a ganhar relevância e os fatores reais elevam sua variabilidade.

Por fim, avaliou-se o peso de cada fator considerando períodos de recessão e expansão caracterizados pela datas de recessão NBER. Variáveis reais e de preço são muito mais relevantes em períodos de expansão. Por outro lado, variáveis financeiras são mais relevantes em períodos de recessão. Em ambos os períodos, o fator financeiro apresenta maior variabilidade, entretanto, esta se eleva bastante durante as recessões.

Sumarizando, variáveis reais possuem maior poder de previsão dentro da amostra se se considerar o período de 1961.10 à 2012.01. Variáveis de preço também possuem comportamento semelhante. O poder de previsão destas variáveis é mais relevante em períodos de expansão. Variáveis financeiras, por sua vez, são bastante relevantes em períodos marcados por forte instabilidade, como na década de 1970 e após a Grande Crise de 2008. Este é o fator que apresenta maior variabilidade ao longo da amostra.

Uma forma alternativa de avaliar o peso de cada grupo de variáveis se dá por meio da especificação 3 (SP3-I). Esta especificação busca evitar a perda de eficiência na estimação dos fatores que ocorre ao utilizar um número baixo de variáveis em cada bloco de variáveis, como na especificação 2 (SP2-I). Portanto, este exercício servirá como uma forma de verificar a robustez dos dois principais resultados encontrados: i. existe forte instabilidade e incerteza na estimação da equação de previsão; ii. variáveis reais tem maior importância para a previsibilidade do excesso de retorno durante períodos de expansão e variáveis financeiras são mais relevantes em períodos de recessão. As variáveis são separadas em três grandes blocos: Bloco Nominais, que incluem variáveis de preço, taxa de câmbio e moeda; Bloco Real que inclui apenas variáveis reais, como produto, mercado de trabalho e consumo; Bloco Financeiro, que inclui as variáveis financeiras.

Os resultados das probabilidades à posterioris estimadas encontram-se na Figura 4. Depreende-se que as variáveis financeiras são bastante voláteis no período, entretanto passam a ganhar relevância após a Crise de 2001. Durante o período da Grande Moderação, os fatores real e nominal foram os que apresentaram maior poder de previsão sobre o excesso de retorno. Porém, durante a década de 1970, o fator composto por variáveis nominais mostrou-se mais relevante.

Os resultados deste último exercício confirmam as conclusões obtidas com a especificação 2. Logo, apesar de cada bloco de variáveis ser pequeno na especificação 2, isto não prejudicou fortemente as estimativas de cada fator.

É interessante notar o desempenho do fator real após os períodos de recessão do NBER que adquiri bastante relevância. Este resultado pode ser explicado pela característica do ciclos de negócios anteriores a Grande Crise de 2008. Períodos de recessão eram seguidos por baixos níveis de utilização da capacidade produtiva, implicando em rápidos aumento do produto, consumo e redução do desemprego (NG e WRIGHT, 2013) após a recessão.

Portanto, variáveis reais seriam os principais motores da economia após períodos de recessão. E isso pode ter refletido no seu poder de previsão. Vale ressaltar que mesmo fenômeno aparentemente não ocorre após a Grande Crise de 2008.

4.2 Previsão *In-sample*

Nesta subseção serão apresentados os resultados para a previsão *in-sample*. O objetivo é mostrar que o modelo fatorial ponderado pelo DMA possui maior poder de previsão *in-sample* do que modelos que não utilizam a ponderação dinâmica. Como *benchmark* serão utilizados os modelos fatoriais estimados por PCM e selecionados por critérios de informação, como proposto por Stock e Watson (2002)²¹, e as regressões bivariadas em que uma das variáveis financeiras é utilizada como regressor.

²¹Stock e Watson (2002) propuseram a utilização de critérios de informação como o de Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC) para selecionar o melhor conjunto de fatores que, posteriormente, são incluídos na equação de previsão. Aqui optou-se por utilizar apenas o critério BIC. Os resultados não se modificaram significativamente ao se utilizar outros critérios, como o AIC ou o \bar{R}^2 , este último sugerido por Neely et al (2015). Em anexo são apresentados os resultados não reportados nesta seção. É importante notar que Bai e Ng (2008) argumentam que a utilização de critérios de informação não é adequada quando o objetivo é a previsão, pois critérios de informação assumem a existência de um nível de ordenação das variáveis, que não é adequada a modelos fatoriais.

Previsões *in-sample* tem sido recentemente sofrido bastante críticas quanto a sua validade, como em Goyal e Welch (2003 e 2008) e Clark e McCracker (2005). Tais críticas baseiam-se em três argumentos. Primeiro, resultados *in-sample* não garantem a existência de resultados *out-of-sample*. Segundo, resultados *out-of-sample* seriam mais próximos da prática de um profissional de previsão (*forecaster*), pois estes desconhecem toda a amostra quando realizam suas previsões. Terceiro, previsões *out-of-sample* acomodam melhor quebras estruturais.

Inoue e Killian (2004), por outro lado, argumentam a favor das previsões *in-sample*. Eles mostram que testes de significância individual e global realizados sobre a *in-sample* são tão confiáveis quanto testes sobre a *out-of-sample*, mesmo diante de quebras estruturais não incorporadas. Adicionalmente, as previsões *out-of-sample* sofrem com a redução do número de observações ao se realizar as previsões, especialmente, nos períodos iniciais da amostra. Isso pode resultar e perda de eficiência na estimação dos parâmetros, reduzindo o poder de previsão dos modelos.

Diante da inconclusão teórica e considerando a prática comum em trabalhos que examinam a previsão sobre o excesso de retorno, optou-se por realizar os dois exercícios. Nesta seção são apresentados os resultados *in-sample* e na seção seguinte os resultados na *out-of-sample*.

A avaliação das previsões *in-sample* será realizada por meio de duas estatísticas. Primeiro, a significância do coeficiente de inclinação do modelos estimados indica se determinada variável possui poder de previsão sobre a variável alvo. A hipótese nula a ser testada é a de que tal variável não apresenta previsibilidade sobre o excesso de retorno, $H_0 : \beta = 0$, indicando que o coeficiente constante é o que possui maior poder de previsão. Inoue e Killian (2004) e Neely et al (2015) realizam um teste de hipótese assimétrico, pois esperam que β tenha sinal positivo.

Não será assumido essa hipótese aqui, uma vez que fatores não possuem as mesmas características estatísticas que outras variáveis sobre as quais tais recomendações foram realizadas. Isso se deve ao fato de fatores serem gerados no sentido de Pagan (1984). Autores como Bai e Ng (2008), Ludvigson e Ng (2011), Gonçalves e Perron (2014) mostram evidências de que o processo de estimação dos fatores afeta sua distribuição amostral. Dessa forma, o teste a ser realizado é $H_0 : \beta = 0$ contra $H_1 : \beta \neq 0$.

Por fim, será utilizado a estatística R^2 que mensura o poder de explicação do conjunto de variáveis sobre a variável explicativa. Para verificar o comportamento dos estimadores em períodos de expansão e recessão o R^2 será alternativamente calculado por meio da seguinte fórmula:

$$R_j^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T 1(j) \hat{\epsilon}_{i,t}^2}{\sum_{t=1}^T 1(j) (y_t - \bar{y}_t)^2}$$

Em que: $1(j)$ é uma função indicadora em que $j = \begin{cases} 1 & \text{se } t \text{ expansão} \\ 0 & \text{se } t \text{ recessão} \end{cases}$ e $\hat{\epsilon}_{i,t}^2$ é o resíduo ao quadrado do

modelo i . Note que neste caso, o R^2 pode assumir valores negativos.

Neste exercício será utilizado todas as variáveis disponíveis para estimar tanto os fatores ponderados como os fatores sem DMA. Todavia, devido a evidência de menor previsibilidade das variáveis financeiras sobre o excesso de retorno, duas especificações serão consideradas: SP1 em que todas as variáveis, macroeconômicas e financeiras, serão incluídas na amostra; e SP2 em que apenas variáveis macroeconômicas são incluídas. Além disso, por concisão, não serão considerados as extensões propostas ao modelo fatorial com DMA. O teste de Bai e Ng (2002) indicou a utilização ideal de cinco fatores.

A tabela 2 apresenta os resultados *in-sample*. Observe que com excessão das variáveis expansão líquida de ativos (ntis) e inflação (inf) as regressões bivariadas não apresentaram coeficientes significativos nem a 10%. Com relação a especificação SP1, os modelos fatoriais estimados utilizando o DMA apresentaram dois fatores significativos a 1%, enquanto que os modelos fatoriais sem DMA apenas um fator estatisticamente significante. O mesmo resultado é válido para o caso da SP2, entretanto, a significância do quinto fator foi ao nível de 5% apenas.

Com relação ao poder de explicação mensurado pelo R^2 , modelos fatoriais apresentaram resultados mais expressivos em relação as regressões bivariadas, seja na amostra completa ou em períodos de recessão e expansão.

Comparando os modelos fatoriais, aqueles estimados considerando a incerteza e instabilidade por meio do DMA apresentaram maiores R^2 . Apenas em períodos de expansão, os modelos fatoriais com DMA foram piores que os modelos fatoriais sem DMA. Este resultado pode ser atribuído a baixa volatilidade em períodos de expansão, o que faz com que modelos que incorporem instabilidade perdam poder de previsão.

Todavia, na amostra completa e em períodos de recessão o desempenho do modelos fatoriais com DMA foi muito superior aos modelos fatoriais sem DMA. De fato, para a especificação SP1 o desempenho na amostra completa foi quase dobro do modelo sem DMA e aproximadamente cinco vezes maior em períodos de recessão. Com relação a SP2 o desempenho do modelo fatorial com DMA diminuiu na amostra completa, porém, manteve-se aproximadamente cinco vezes maior em períodos de recessão.

Cocluí-se, portanto, que modelos fatoriais utilizando ponderação dinâmica possuem desempenho *in-sample* bem superior a modelos que não utilizam ponderação e contra regressões bivariadas utilizando variáveis consideradas boas predictoras do excesso de retorno. Tal desempenho aumenta significativamente em períodos de recessão, indicando que a ponderação dinâmica do DMA acomoda instabilidades e incertezas quando a correta forma funcional dos modelos de previsão é desconhecida.

5. Previsão *out-of-sample*

Para avaliar a performance de fora da amostra serão utilizadas duas medidas. A primeira será o R^2 de fora da amostra (R_{OS}^2) que mensura a redução proporcional no erro quadrático médio de previsão de determinado modelo ($EQMF_i$)²² em relação a um *benchmark*, no caso, em relação ao EQMF da média histórica ($EQMF_0$). Sua definição original deve-se a Campbell e Thompson (2008).

$$R_{OS,i}^2 = 1 - (EQMF_i/EQMF_0)$$

Perceba que se $R_{OS,i}^2 > 0$ então o modelo i tem maior poder de previsão que a média histórica. Para verificar a hipótese de que: $H_0 : R_{OS}^2 \leq 0$ contra $H_A : R_{OS}^2 > 0$ será calculado o valor p segundo o teste de Clark e McCracken (2001) e Clark e West (2007) para modelos aninhados²³.

Entretanto, a medida do R_{OS}^2 apenas mensura o poder preditivo dos modelos sem consideram sua capacidade de gerar retornos financeiros. Investidores não estão diretamente interessado no poder preditivo dos modelos, mas sim, na possibilidade que aquele modelo gere lucros futuros. Leitch e Tanner (1991) foram os primeiros a observar que não existia uma relação direta entre modelos com maior poder preditivo e modelos economicamente lucrativos.

Assim, é comum em análises de previsão²⁴ do excesso de retorno utilizar métricas baseadas na lucratividade ou na utilidade dos modelos. Nesse caso, a previsão do excesso de retorno serve como um meio para obter resultados mais lucrativos, isto é, a previsão é relevante para a tomada de decisão econômica.

Considere um investidor que busca maximizar sua utilidade por critérios de média-variância. Assuma que ψ seja a aversão ao risco do investidor que aloca recursos entre o índice e um ativo livre de risco baseado na previsão realizada pelo modelo i do excesso de retorno para o tempo $t + 1$. No tempo t o investidor aloca parte dos seus recursos no ativo com risco:

$$\alpha_{i,t} = \left(\frac{1}{\psi} \right) \left(\frac{\hat{y}_{i,t+1}}{\hat{\sigma}_{i,t+1}^2} \right) \quad (16)$$

Em que: $\hat{\sigma}_{i,t+1}^2$ é a estimativa da variância do índice. Existem diversas formas de estimar a variância. Andersen *et al* (2006) e Christoffersen (2012) apresentam boas revisões sobre o tema. Aqui será adotado o mesmo procedimento de Campbell e Thompson (2008) que estimaram $\hat{\sigma}_{i,t+1}^2$ usando uma amostra da variância computada numa janela de cinco anos dos retornos históricos. A utilidade do investidor é estimada pelo modelo i é dada por:

$$\hat{U}_i = \hat{\mu}_i - 0.5\psi\hat{\sigma}_i^2 \quad (17)$$

Onde: $\hat{\mu}_i$ e $\hat{\sigma}_i^2$ são a média e a variância, respectivamente, do portfólio formado sobre as previsões para $\hat{y}_{i,t+1}$ e $\hat{\sigma}_{i,t+1}^2$. Por sua vez, a utilidade ao se basear sua alocação de recursos por meio da média histórica é dada por:

$$\hat{U}_0 = \hat{\mu}_0 - 0.5\psi\hat{\sigma}_0^2 \quad (18)$$

²²O erro quadrático médio de previsão (EQMF) em sua versão absoluta é definido por:

$$EQMF_i = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P (y_{t+i} - \hat{y}_{t+i|t})^2$$

Em que: P é o tamanho da amostra de fora.

²³Clark e West (2007) adaptaram o clássico teste de Diebold e Mariano (1997) para modelos que aninhados. Essa adaptação deveu-se ao fato de que modelos aninhados a distribuição do teste de Diebold e Mariano não é padrão. Essa adaptação foi também utilizada em outros estudos que mensuram o poder de previsão sobre o excesso de retorno como Rapach *et al* (2010), Dangl e Halling (2012) e Neely *et al* (2015).

²⁴Ver Elliott, Timmermann e Gargano (2013), Rapach e Zhou (2012), Campbell e Thompson (2008), Elliott e Timmermann (2016), entre outros.

Onde, novamente, $\hat{\mu}_0$ e $\hat{\sigma}_0^2$ são a média e a variância, respectivamente, do portfólio formado sobre as previsões para a média histórica e $\hat{\sigma}_{t+1}^2$. A medida que será reportada é o Retorno do Certo Equivalente (CER) que é a diferença entre \hat{U}_i e \hat{U}_0 . Será assumido que $\psi = 5$.

Ao contrário da seção anterior, em que apenas o modelo fatorial com DMA sem supervisão foi apresentado, aqui serão reportados também os resultados para as três extensões sugeridas: Lasso-FDMA, CFPC-DMA e LAR-DMA. Além disso, será considerado também as possíveis variações dos valores dos parâmetros de esquecimento, (λ, α) , que poderão assumir os pares dentro do conjunto: $\mathcal{O} = \{(0.95; 0.95), (0.95, 0.99), (0.99, 0.95), (0.99, 0.99)\}$. Esta variação dos parâmetros de esquecimento servirá como uma análise de sensibilidade do modelo fatorial com DMA.

Por fim, as mesmas especificações utilizadas na amostra *in-sample* serão consideradas neste exercício. A especificação SP1 incluirá todas as variáveis, sejam elas macroeconômicas ou financeiras. Já na especificação SP2, apenas variáveis macroeconômicas são incluídas. Foi reservado as 109 primeiras observações para a amostra *in-sample*. A previsão *out-of-sample* será realizada sobre as demais 479 observações, correspondendo ao período de 1970.1 até 2012.1.

Neste exercício será considerado um número maior de modelos para comparar com os modelos fatoriais com DMA. Além das regressões bivariadas e dos modelos fatoriais sem DMA, serão considerados: i. Modelo *Kitchen Sink* (KS), que considera as quatorze variáveis financeiras em uma única regressão linear estimada por OLS; ii. Modelo *SIC Forecasts*, em que dentre as quatorze variáveis financeiras que geram 2^{14} possíveis modelos é aplicado um critério de seleção bayesiano (SIC) para selecionar o melhor modelo previsão; iii. Modelo DMSFE, que aplica uma combinação de previsões dinâmicas considerando como peso um fator descontado do erro de previsão quadrático (MSFE). Este método foi desenvolvido por Rapach et al (2010). Por fim, iv. Modelo POOL-SMA, que combina as previsões aplicando igual peso a cada uma delas.

Os resultados do exercício sobre o *out-of-sample* são apresentados em duas tabelas: tabelas 4 e 5. Na tabela 4 estão os resultados para os modelos listados como *benchmark*. Entre parênteses estão os p-valores estimados. Nota-se que todos os modelos apresentaram resultado inferior a média histórica, seja considerando toda a amostra ou períodos de recessão ou expansão. A única exceção é o modelo fatorial sem DMA que utiliza apenas as variáveis macroeconômicas. Este modelo teve desempenho superior, porém, não significativo, em relação a média histórica em períodos de recessão.

Por sua vez, a tabela 5 apresenta os resultados para o modelo fatorial ponderado dinamicamente. Depreende-se que quase todos os resultados também apresentaram poder de previsão inferior a média histórica. Exceção são os modelos FDMA(0.99; 0.95) e o Lasso-FDMA (0.99, 0.99) para o período de recessão. O último não rejeitou a hipótese de superior poder de previsão em relação à média histórica. Apenas o modelo FDMA(0.99; 0.95) mostrou-se significativamente superior a média histórica. Observe que este modelo foi o melhor considerando todos os modelos testados apesar de seu desempenho estar limitado a períodos de recessão.

A tabela 6 reporta os resultados para o retorno de equivalente certo (CER) dos modelos de previsão. Como discutido, um valor positivo do CER significa que a utilização de determinado modelo de previsão para obter ganhos financeiros logra sucesso. Nota-se que os modelos FDMA conseguiram promover ganhos financeiros em ambas as especificações e considerando todos os períodos, de expansão, de recessão e geral.

Em períodos de expansão a regressão bivariada que utiliza a variável expansão líquida de ativos (ntis) foi a que apresentou maior ganho. Entretanto, o segundo maior ganho foi o modelo Lasso-FDMA(0.95, 0.95) estimado em toda amostra (SP1). Em períodos de recessão o modelo Lasso-FDMA (0.99, 0.95), para a especificação SP2, apresentou o maior ganho dentre todos os modelos testados, cerca de 21,97% acima do ganho caso fosse considerada a média histórica. É importante destacar o desempenho de quase todos os modelos fatoriais com DMA e algumas de regressões bivariadas que apresentaram retorno acima de 10%. Por fim, considerando a amostra completa os modelos que apresentaram maiores retornos foram o Lasso-FDMA (0.99, 0.95), tanto para as especificações SP1 e SP2, e o FDMA(0.99, 0.95).

Conclui-se que os modelos fatoriais ponderados pelo DMA são aqueles geraram maiores ganhos financeiros em relação a todos os outros modelos e que, segundo o R_{OSS}^2 , apresentou melhor previsão contra a média histórica, ao menos em períodos de recessão.

6. Conclusão

Este trabalho buscou incorporar a potencial presença de instabilidades nos parâmetros e incerteza sobre a especificação ideal de modelos fatoriais para prever o excesso de retorno do S&P 500. Os fatores estimados por meio de

PCM compuseram a equacao de previsao de foram que lhes foi atribuido uma probabilidade baseada no seu poder de previsao.

Verificou-se a partir análise das probabilidade a posterioris estimadas que o variáveis reais possuem maior poder de previsão sobre o excesso de retorno, enquanto variáveis financeiras possuem menor poder e maior variabilidade. Variáveis financeiras, adicionalmente, adquirem bastante relevância em períodos de expansão.

No exercício *in-sample* os modelos fatoriais que incorporam ponderação dinâmica tiveram desempenho significativamente superior se comparado a modelos fatoriais sem ponderação e a regressões bivariadas. O desempenho dos modelos fatoriais ponderados e especialmente superior em períodos de recessão, indicando que eles se adaptam melhor a instabilidades e incertezas quanto a correta especificação da equação de previsão.

Por fim, ao se analisar os resultados *out-of-sample*, verifica-se o desempenho em termos de maior previsão quando comparados a média histórica foi significativamente superior apenas considerando o período de recessão e para apenas duas especificações, Lasso-FDMA (0.99; 0.95) e FDMA (0.99; 0.95). Entretanto, ao se considerar a possibilidade de utilizar os modelos fatoriais ponderados para obter ganhos monetários o desempenho foi significativamente superior aos demais modelos considerados.

7. Referências bibliográficas

- ANG, Andrew; BEKAERT, Geert. Stock return predictability: Is it there?. **Review of Financial studies**, v. 20, n. 3, p. 651-707, 2007.
- BAI, Jushan; NG, Serena. Determining the number of primitive shocks in factor models. **Journal of Business & Economic Statistics**, 2012.
- BAI, Jushan; NG, Serena. Forecasting economic time series using targeted predictors. **Journal of Econometrics**, v. 146, n. 2, p. 304-317, 2008.
- BAIR, Eric et al. Prediction by supervised principal components. **Journal of the American Statistical Association**, 2012.
- BATES, John M.; GRANGER, Clive WJ. The combination of forecasts. **Journal of the Operational Research Society**, v. 20, n. 4, p. 451-468, 1969.
- BOIVIN, Jean; NG, Serena. Are more data always better for factor analysis?. **Journal of Econometrics**, v. 132, n. 1, p. 169-194, 2006.
- CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; SANTOS, André AP. Previsões Macroeconômicas Baseadas em Modelos TVP-VAR: Evidências Para o Brasil. **Revista Brasileira de Economia**, v. 69, n. 4, p. 407-428, 2015.
- CAMPBELL, John Y.; SHILLER, Robert J. Stock prices, earnings, and expected dividends. **The Journal of Finance**, v. 43, n. 3, p. 661-676, 1988.
- CAMPBELL, John Y.; THOMPSON, Samuel B. Predicting excess stock returns out of sample: Can anything beat the historical average?. **Review of Financial Studies**, v. 21, n. 4, p. 1509-1531, 2008.
- CAMPBELL, John Y.; THOMPSON, Samuel B. Predicting excess stock returns out of sample: Can anything beat the historical average?. **Review of Financial Studies**, v. 21, n. 4, p. 1509-1531, 2008.
- CAMPBELL, John Y.; VUOLTEENAHO, Tuomo. Inflation illusion and stock prices. **National bureau of economic research**, 2004.
- CARRASCO, Marine; ROSSI, Barbara. In-sample Inference and Forecasting in Misspecified Factor Models. **Journal of Business & Economic Statistics**, p. 1-72, 2016.
- CHENG, X. and HANSEN, B. Forecasting with Factor-Augmented Regression: A frequentist model averaging approach. **Journal of Econometrics**, 186, 280-293, 2015.
- CHRISTOFFERSEN, Peter F. Elements of financial risk management. **Academic Press**, 2012.
- CLARK, Todd E.; MCCracken, Michael W. Tests of equal forecast accuracy and encompassing for nested models. **Journal of econometrics**, v. 105, n. 1, p. 85-110, 2001.
- CLARK, Todd E.; WEST, Kenneth D. Approximately normal tests for equal predictive accuracy in nested models. **Journal of econometrics**, v. 138, n. 1, p. 291-311, 2007.
- COCHRANE, John H. Asset Pricing: (Revised Edition). **Princeton university press**, 2009.
- DANGL, Thomas; HALLING, Michael. Predictive regressions with time-varying coefficients. **Journal of Financial Economics**, v. 106, n. 1, p. 157-181, 2012.
- EFRON, Bradley et al. Least angle regression. **The Annals of statistics**, v. 32, n. 2, p. 407- 499, 2004.
- ELLIOT, G. e TIMMERMANN, A. Economic Forecasting. **Princeton University Press**, New Jersey, 2016.
- ELLIOTT, Graham; GARGANO, Antonio; TIMMERMANN, Allan. Complete subset regressions. **Journal of Econometrics**, v. 177, n. 2, p. 357-373, 2013.

FAGIN, Ronald; HALPERN, Joseph Y.; MEGIDDO, Nimrod. A logic for reasoning about probabilities. **Information and computation**, v. 87, n. 1, p. 78-128, 1990.

FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. Dividend yields and expected stock returns. **Journal of financial economics**, v. 22, n. 1, p. 3-25, 1988.

FAMA, Eugene F.; SCHWERT, G. William. Asset returns and inflation. **Journal of financial economics**, v. 5, n. 2, p. 115-146, 1977.

FERREIRA, Miguel A.; SANTA-CLARA, Pedro. Forecasting stock market returns: The sum of the parts is more than the whole. **Journal of Financial Economics**, v. 100, n. 3, p. 514-537, 2011.

GELPER, Sarah; CROUX, Christophe. Least angle regression for time series forecasting with many predictors. 2008. Working paper.

GIOVANNELLI, Alessandro; PROIETTI, Tommaso. On the selection of common factors for macroeconomic forecasting. 2015. Working paper.

HARVEY, David; LEYBOURNE, Stephen; NEWBOLD, Paul. Testing the equality of prediction mean squared errors. **International Journal of forecasting**, v. 13, n. 2, p. 281-291, 1997.

HENKEL, Sam James; MARTIN, J. Spencer; NARDARI, Federico. Time-varying short-horizon predictability. **Journal of Financial Economics**, v. 99, n. 3, p. 560-580, 2011.

HUANG, Huiyu; LEE, Tae-Hwy. Forecasting value-at-risk using high-frequency information. **Econometrics**, v. 1, n. 1, p. 127-140, 2013.

JACQUIER, Eric; POLSON, Nicholas G.; ROSSI, Peter E. Bayesian analysis of stochastic volatility models. **Journal of Business & Economic Statistics**, 2012.

JAZWINSKI, A. H. Mathematics in science and engineering. **Stochastic Processes and Filtering Theory**, v. 64, 1970.

KELLY, Bryan; PRUITT, Seth. The three-pass regression filter: A new approach to forecasting using many predictors. **Journal of Econometrics**, v. 186, n. 2, p. 294-316, 2015.

KIM, H., and SWANSON, N. Forecasting financial and macroeconomic variables using data reduction methods: new empirical evidence. **J. Econometrics** 178, 352367, 2014.

KIM, H., and SWANSON, N. Forecasting financial and macroeconomic variables using data reduction methods: new empirical evidence. **J. Econometrics** 178, 352367, 2014.

KOOP, G. and POTTER, S. Forecasting in dynamic factor models using bayesian model averaging. **Econometrics Journal**, 7:550-565, 2004.

KOOP, Gary; KOROBLIS, Dimitris. Forecasting inflation using dynamic model averaging. **International Economic Review**, v. 53, n. 3, p. 867-886, 2012.

KOOP, Gary; KOROBLIS, Dimitris. UK macroeconomic forecasting with many predictors: Which models forecast best and when do they do so?. **Economic Modelling**, v. 28, n. 5, p. 2307-2318, 2011.

LAMONT, Owen. Earnings and expected returns. **The journal of Finance**, v. 53, n. 5, p. 1563-1587, 1998.

LEE, Tae-Hwy; TU, Yundong; ULLAH, Aman. Nonparametric and semiparametric regressions subject to monotonicity constraints: Estimation and forecasting. **Journal of Econometrics**, v. 182, n. 1, p. 196-210, 2014.

LEHMANN, Bruce N.; MODEST, David M. The empirical foundations of the arbitrage pricing theory. **Journal of Financial Economics**, v. 21, n. 2, p. 213-254, 1988.

LEITCH, Gordon; TANNER, J. Ernest. Economic forecast evaluation: profits versus the conventional error measures. **The American Economic Review**, p. 580-590, 1991.

LUDVIGSON, Sydney C.; NG, Serena. The empirical risk-return relation: A factor analysis approach. **Journal of Financial Economics**, v. 83, n. 1, p. 171-222, 2007.

NEELY, C. J. et al. Forecasting the equity risk premium: The role of technical indicators. Federal Reserve Bank of St. Louis. working paper, 2012.

ONORANTE, Luca; RAFTERY, Adrian E. Dynamic model averaging in large model spaces using dynamic Occam's window. **European economic review**, v. 81, p. 2-14, 2016.

PONTIFF, Jeremy; SCHALL, Lawrence D. Book-to-market ratios as predictors of market returns. **Journal of Financial Economics**, v. 49, n. 2, p. 141-160, 1998.

RAFTERY, Adrian E.; KÁRNÝ, Miroslav; ETTLER, Pavel. Online prediction under model uncertainty via dynamic model averaging: Application to a cold rolling mill. **Technometrics**, v. 52, n. 1, p. 52-66, 2010.

RAPACH, David E. et al. Forecasting stock returns. **Handbook of Economic Forecasting**, v. 2, n. Part A, p. 328-383, 2013.

SHILLER, Robert J.; BELTRATTI, Andrea E. Stock prices and bond yields: Can their comovements be explained in terms of present value models?. **Journal of Monetary Economics**, v. 30, n. 1, p. 25-46, 1992.

STOCK, J. H. and WATSON, M. W. Forecasting using principal components from a large number of predictors. **Journal of the American Statistical Association**, 97:1167-1179, 2002.

STOCK, J. H. and WATSON, M. W. Testing for Common Trends. **Journal of the American Statistical Association**, Vol.83, No.404, December 1988.

STOCK, J. H. and WATSON, M. W. Generalized shrinkage methods for forecasting using many predictors. **Journal of Business and Economic Statistics**. 30(4):481-493, 2012.

SVENSSON, Anders et al. The Greenland ice core chronology 2005, 1542ka. Part 2: comparison to other records. **Quaternary Science Reviews**, v. 25, n. 23, p. 3258-3267, 2006.

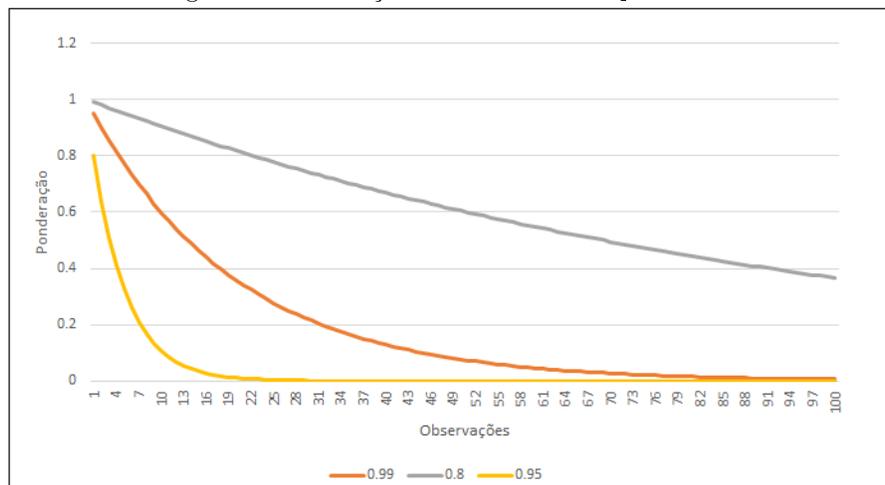
TIMMERMANN, Allan. Forecast combinations. **Handbook of economic forecasting**, v. 1, p. 135- 196, 2006.

WELCH, Ivo; GOYAL, Amit. A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction. **Review of Financial Studies**, v. 21, n. 4, p. 1455-1508, 2008.

WEST, Kenneth D. Forecast evaluation. **Handbook of economic forecasting**, v. 1, p. 99-134, 2006.

Anexos

Figura 1: Ponderação do Fatores de Esquecimento



Nota: A figura 1 mostra o peso atribuído a observações passadas devido a escolha do fator de esquecimento λ . Três valores para o fator de esquecimento são considerados: $\lambda = \{0.80; 0.95, 0.99\}$. Percebe-se que quanto menor o fator de esquecimento, maior é o peso dado a observações mais distantes no tempo.

Figura 2: Probabilidades a posteriori SP1

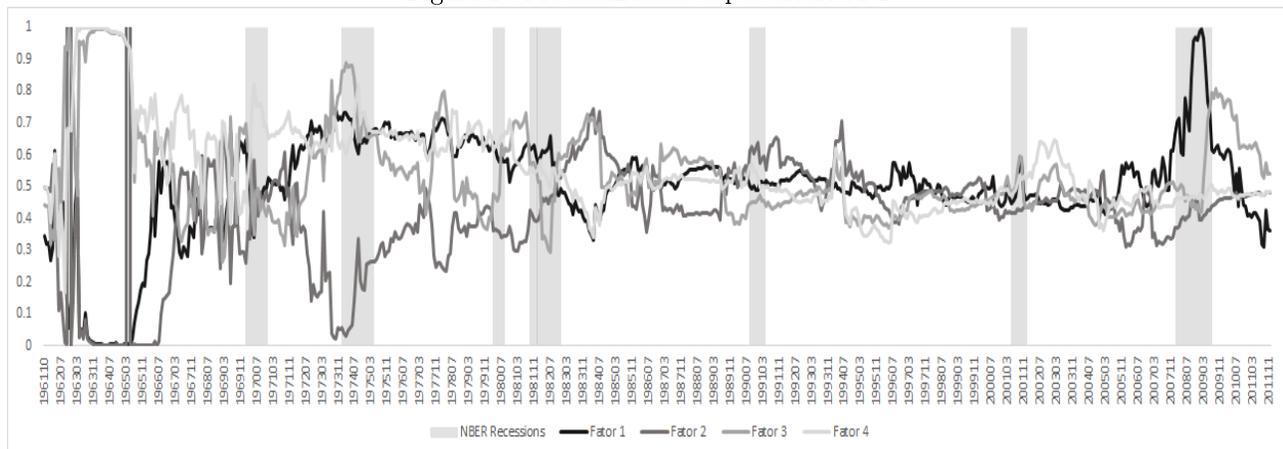


Figura 3: Probabilidade a posteriori SP2

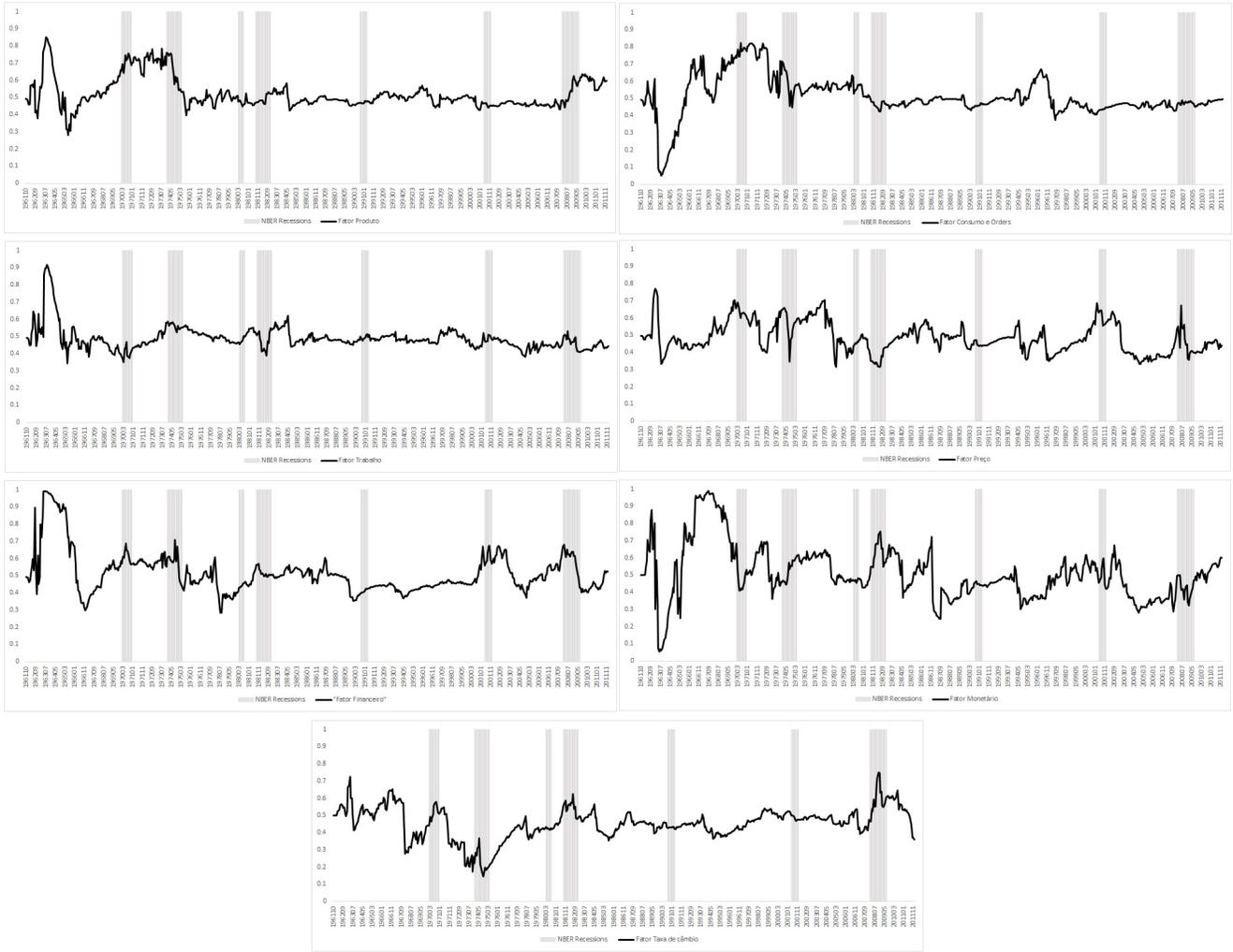


Figura 4: Probabilidade a posteriori SP3

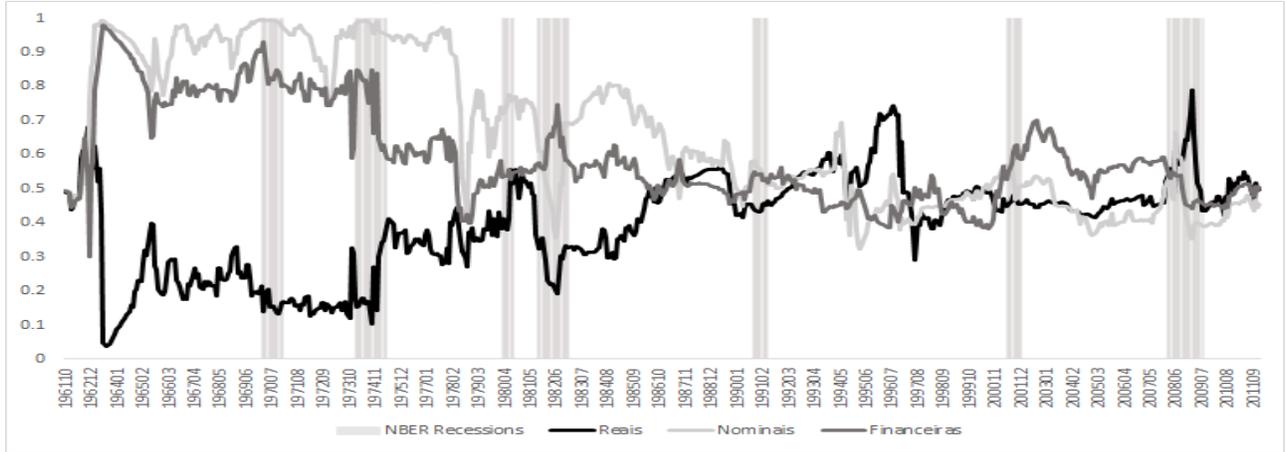


Figura 5: DSCFE

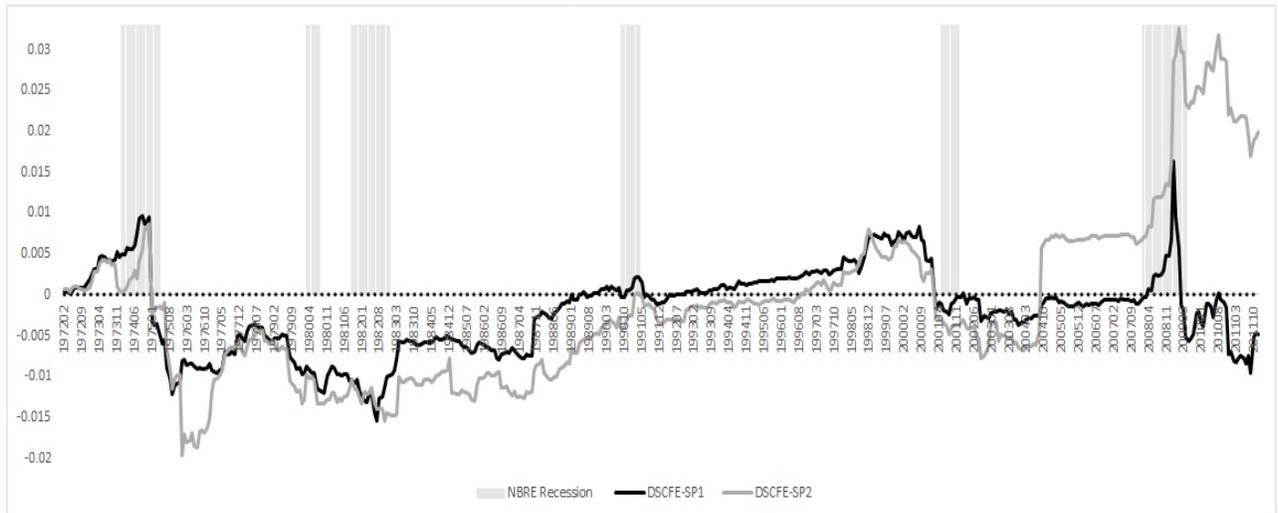


Table 2: Desvios padrões SP2

| Painel A | Produto | Preço | Trabalho | Consumo | Moeda | Taxa de câmbio | Financeiro |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Períodos | | | | | | | |
| 1961.10-2012.1 | -0.517 (0.121) | -0.475 (0.151) | -0.483 (0.101) | -0.509 (0.142) | -0.124 (0.430) | 0.025 (0.456) | -0.021 (1.119) |
| 1970.01-1982.12 | -0.553 (0.163) | -0.584 (0.174) | -0.483 (0.108) | -0.600 (0.174) | -0.124 (0.135) | 0.025 (0.422) | 1.201 (0.849) |
| 1983.01-2008.01 | -0.480 (0.066) | -0.412 (0.099) | -0.462 (0.058) | -0.467 (0.057) | -0.182 (0.393) | 0.035 (0.507) | -0.407 (0.971) |
| 2008.02-2012.01 | -0.548 (0.129) | -0.432 (0.167) | -0.447 (0.091) | -0.458 (0.060) | 0.102 (1.121) | 0.044 (0.653) | -1.168 (0.205) |
| Painel B | | | | | | | |
| Recessão | -0.433 (0.126) | -0.463 (0.227) | -0.378 (0.097) | -0.449 (0.161) | -0.009 (0.658) | -0.017 (0.589) | 0.571 (1.649) |
| Expansão | -0.530 (0.115) | -0.477 (0.136) | -0.500 (0.092) | -0.518 (0.136) | -0.143 (0.379) | 0.032 (0.431) | -0.115 (0.979) |

Table 5: Resultados Out-sample: Parte A

| R_{OSS}^2 | | | | | | |
|---------------------------------|---------|--------|-----------|--------|-----------|--------|
| Painel A: Regressões Bivariadas | Geral | | Expansão | | Recessão | |
| log_dp | -26,60 | [0,58] | -3045,16 | [0,41] | -1854,48 | [0,70] |
| log_dy | -26,67 | [0,62] | -3055,23 | [0,46] | -1854,37 | [0,71] |
| log_ep | -5,94 | [0,70] | -609,70 | [0,41] | -561,90 | [0,80] |
| log_de | -0,082 | [0,80] | -10,97 | [0,82] | -2,66 | [0,56] |
| svar | -320,90 | [0,49] | -38171,10 | [0,88] | -19351,05 | [0,06] |
| bm | -0,10 | [0,44] | -12,58 | [0,81] | -7,01 | [0,25] |
| ntis | -10,44 | [0,40] | -1154,41 | [0,18] | -813,76 | [0,73] |
| T_bill | -2,78 | [0,56] | -267,70 | [0,57] | -301,61 | [0,52] |
| lty | -6,86 | [0,63] | -625,34 | [0,60] | -814,30 | [0,59] |
| ltr | -0,70 | [0,82] | -76,32 | [0,45] | -58,25 | [0,93] |
| ts | -10,58 | [0,60] | -1116,70 | [0,33] | -935,75 | [0,75] |
| dfy | -276,75 | [0,60] | -27375,00 | [0,61] | -28304,21 | [0,55] |
| dfr | -7,60 | [0,89] | -1037,03 | [0,91] | -181,16 | [0,50] |
| inf | -1,08 | [0,39] | -129,17 | [0,13] | -66,17 | [0,89] |
| | | | | | | |
| Painel B: Outros Modelos | Geral | | Expansão | | Recessão | |
| KS | -0,06 | [0,01] | -5,38 | [0,01] | -7,52 | [0,16] |
| SIC Forecasts | -0,06 | [0,09] | -7,94 | [0,24] | -3,37 | [0,13] |
| POOL-SMA | -2,90 | [0,70] | -331,48 | [0,89] | -203,65 | [0,44] |
| DMSFE | -1,31 | [0,77] | -163,47 | [0,42] | -64,04 | [0,94] |
| FATORES Todas as variáveis | -0,02 | [0,74] | -3,86 | [0,85] | -0,13 | [0,39] |
| FATORES Variáveis Macro | -0,02 | [0,13] | -4,39 | [0,20] | 0,83 | [0,23] |

Table 3: Resultados In-sample

| Previsores | | Coef. | t-stats | R2 | R2_exp | R2_rec | Previsores | Coef. | t-stats | R2 | R2_exp | R2_rec |
|--|--|---------|-------------|--------|---------|---------|------------|--------|-------------|---------|--------|---------|
| Painel A: Regressões Bivariadas | | | | | | | | | | | | |
| log_dp | | -0.115 | (-0.211) | 0.006% | -0.016% | 0.166% | | | | | | |
| log_dy | | -0.316 | (-0.567) | 0.050% | -0.005% | 0.444% | | | | | | |
| log_ep | | -0.263 | (-0.451) | 0.035% | 0.004% | 0.256% | | | | | | |
| log_de | | 0.235 | (0.389) | 0.018% | 0.036% | -0.114% | | | | | | |
| svar | | -0.967 | (-0.050) | 0.000% | 0.000% | 0.000% | | | | | | |
| bm | | -0.851 | (-1.085) | 0.167% | 0.110% | 0.574% | | | | | | |
| ntis | | -14.168 | (-2.478)* | 0.624% | 0.397% | 2.247% | | | | | | |
| T_bill | | 0.372 | (0.043) | 0.000% | 0.004% | -0.029% | | | | | | |
| lty | | 8.032 | (0.661) | 0.097% | 0.155% | -0.315% | | | | | | |
| lkr | | -2.421 | (-0.194) | 0.008% | -0.057% | 0.465% | | | | | | |
| ts | | -20.059 | (-1.134) | 0.224% | 0.134% | 0.866% | | | | | | |
| dfy | | -20.633 | (-1.137) | 0.155% | 0.104% | 0.522% | | | | | | |
| dfr | | 14.210 | (-1.095) | 0.164% | 0.061% | 0.892% | | | | | | |
| inf | | 5.013 | (2.115)** | 0.506% | 0.658% | -0.578% | | | | | | |
| Painel B: Especificação SP1 - Todas as variáveis | | | | | | | | | | | | |
| Sem DMA | | | | | | | | | | | | |
| F1 | | -0.009 | (-0.191) | 2.890% | 2.893% | 2.845% | Com DMA | F1 | 0.085 | (0.821) | 5.810% | 1.893% |
| F2 | | -0.108 | (-1.421) | | | | F2 | 0.007 | (0.031) | | | 14.644% |
| F3 | | -0.224 | (-3.634)*** | | | | F3 | -0.463 | (-3.880)*** | | | |
| F4 | | 0.095 | (1.356) | | | | F4 | 0.055 | (0.376) | | | |
| F5 | | 0.092 | (1.095) | | | | F5 | 0.782 | (3.180)*** | | | |
| Painel C: Especificação SP2 - Apenas variáveis Macroeconômicas | | | | | | | | | | | | |
| Sem DMA | | | | | | | | | | | | |
| F1 | | -0.008 | (-0.160) | 2.970% | 3.229% | 1.879% | Com DMA | F1 | 0.089 | (0.907) | 3.360% | 1.129% |
| F2 | | -0.108 | (-1.415) | | | | F2 | -0.042 | (-0.208) | | | 8.388% |
| F3 | | -0.248 | (-3.910)*** | | | | F3 | -0.419 | (-2.633)*** | | | |
| F4 | | 0.100 | (1.276) | | | | F4 | 0.310 | (1.446) | | | |
| F5 | | -0.071 | (-0.632) | | | | F5 | -0.546 | (-2.539)** | | | |

Notas: 1% ***, 5% ** e 10%*

Table 4: Resultados Financeiros

| CER | | CER | |
|---------------------------------|----------|-------------------------------|----------|
| Painel A: Fator com DMA - SP1 | Recessão | Painel B: Fator com DMA - SP2 | Recessão |
| Geral | Expansão | Geral | Expansão |
| FDMA (0.95,0.95) | 0,148 | FDMA (0.95,0.95) | 1,574 |
| Lasso-FDMA (0.95,0.95) | -0,110 | Lasso-FDMA (0.95,0.95) | 2,294 |
| LAR-FDMA (0.95,0.95) | 1,913 | LAR-FDMA (0.95,0.95) | 2,103 |
| CFPC-FDMA (0.95,0.95) | -2,233 | CFPC-FDMA (0.95,0.95) | 2,373 |
| FDMA (0.95,0.99) | 0,139 | FDMA (0.95,0.99) | 1,408 |
| Lasso-FDMA (0.95,0.99) | -0,027 | Lasso-FDMA (0.95,0.99) | 1,821 |
| LAR-FDMA (0.95,0.99) | -0,491 | LAR-FDMA (0.95,0.99) | 1,514 |
| CFPC-FDMA (0.95,0.99) | -0,663 | CFPC-FDMA (0.95,0.99) | 1,406 |
| FDMA (0.99,0.95) | 0,555 | FDMA (0.99,0.95) | 2,357 |
| Lasso-FDMA (0.99,0.95) | 0,555 | Lasso-FDMA (0.99,0.95) | 3,208 |
| LAR-FDMA (0.99,0.95) | -1,347 | LAR-FDMA (0.99,0.95) | 1,591 |
| CFPC-FDMA (0.99,0.95) | -0,662 | CFPC-FDMA (0.99,0.95) | 1,455 |
| FDMA (0.99,0.99) | 0,092 | FDMA (0.99,0.99) | 1,743 |
| Lasso-FDMA (0.99,0.99) | 0,092 | Lasso-FDMA (0.99,0.99) | 2,283 |
| LAR-FDMA (0.99,0.99) | -1,502 | LAR-FDMA (0.99,0.99) | 0,831 |
| CFPC-FDMA (0.99,0.99) | -0,709 | CFPC-FDMA (0.99,0.99) | 1,439 |
| 9,558 | 9,558 | 9,558 | 9,558 |
| 9,415 | 9,415 | 9,415 | 9,415 |
| 7,331 | 7,331 | 7,331 | 7,331 |
| 14,687 | 14,687 | 14,687 | 14,687 |
| 6,788 | 6,788 | 6,788 | 6,788 |
| 6,783 | 6,783 | 6,783 | 6,783 |
| 8,351 | 8,351 | 8,351 | 8,351 |
| 9,084 | 9,084 | 9,084 | 9,084 |
| 17,333 | 17,333 | 17,333 | 17,333 |
| 17,333 | 17,333 | 17,333 | 17,333 |
| 8,755 | 8,755 | 8,755 | 8,755 |
| 11,000 | 11,000 | 11,000 | 11,000 |
| 13,116 | 13,116 | 13,116 | 13,116 |
| 13,116 | 13,116 | 13,116 | 13,116 |
| 5,749 | 5,749 | 5,749 | 5,749 |
| 8,994 | 8,994 | 8,994 | 8,994 |
| 0,148 | 0,148 | 0,148 | 0,148 |
| -0,110 | -0,110 | -0,110 | -0,110 |
| 1,913 | 1,913 | 1,913 | 1,913 |
| -2,233 | -2,233 | -2,233 | -2,233 |
| 0,139 | 0,139 | 0,139 | 0,139 |
| -0,027 | -0,027 | -0,027 | -0,027 |
| -0,491 | -0,491 | -0,491 | -0,491 |
| -0,663 | -0,663 | -0,663 | -0,663 |
| 0,555 | 0,555 | 0,555 | 0,555 |
| 0,555 | 0,555 | 0,555 | 0,555 |
| -1,347 | -1,347 | -1,347 | -1,347 |
| -0,662 | -0,662 | -0,662 | -0,662 |
| 0,092 | 0,092 | 0,092 | 0,092 |
| 0,092 | 0,092 | 0,092 | 0,092 |
| -1,502 | -1,502 | -1,502 | -1,502 |
| -0,709 | -0,709 | -0,709 | -0,709 |
| 1,712 | 1,712 | 1,712 | 1,712 |
| 1,471 | 1,471 | 1,471 | 1,471 |
| 2,820 | 2,820 | 2,820 | 2,820 |
| 0,576 | 0,576 | 0,576 | 0,576 |
| 1,246 | 1,246 | 1,246 | 1,246 |
| 1,106 | 1,106 | 1,106 | 1,106 |
| 0,982 | 0,982 | 0,982 | 0,982 |
| 0,961 | 0,961 | 0,961 | 0,961 |
| 3,337 | 3,337 | 3,337 | 3,337 |
| 3,337 | 3,337 | 3,337 | 3,337 |
| 0,341 | 0,341 | 0,341 | 0,341 |
| 1,281 | 1,281 | 1,281 | 1,281 |
| 2,256 | 2,256 | 2,256 | 2,256 |
| 2,256 | 2,256 | 2,256 | 2,256 |
| -0,286 | -0,286 | -0,286 | -0,286 |
| 0,908 | 0,908 | 0,908 | 0,908 |
| 1,574 | 1,574 | 1,574 | 1,574 |
| 2,294 | 2,294 | 2,294 | 2,294 |
| 2,103 | 2,103 | 2,103 | 2,103 |
| 2,373 | 2,373 | 2,373 | 2,373 |
| 1,408 | 1,408 | 1,408 | 1,408 |
| 1,821 | 1,821 | 1,821 | 1,821 |
| 1,514 | 1,514 | 1,514 | 1,514 |
| 1,406 | 1,406 | 1,406 | 1,406 |
| 2,357 | 2,357 | 2,357 | 2,357 |
| 3,208 | 3,208 | 3,208 | 3,208 |
| 1,591 | 1,591 | 1,591 | 1,591 |
| 1,455 | 1,455 | 1,455 | 1,455 |
| 1,743 | 1,743 | 1,743 | 1,743 |
| 2,283 | 2,283 | 2,283 | 2,283 |
| 0,831 | 0,831 | 0,831 | 0,831 |
| 1,439 | 1,439 | 1,439 | 1,439 |
| -0,072 | -0,072 | -0,072 | -0,072 |
| 0,380 | 0,380 | 0,380 | 0,380 |
| 0,672 | 0,672 | 0,672 | 0,672 |
| -0,102 | -0,102 | -0,102 | -0,102 |
| 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,690 | 0,690 | 0,690 | 0,690 |
| 0,260 | 0,260 | 0,260 | 0,260 |
| 0,054 | 0,054 | 0,054 | 0,054 |
| -0,022 | -0,022 | -0,022 | -0,022 |
| -0,509 | -0,509 | -0,509 | -0,509 |
| -0,311 | -0,311 | -0,311 | -0,311 |
| -0,429 | -0,429 | -0,429 | -0,429 |
| -0,277 | -0,277 | -0,277 | -0,277 |
| -0,768 | -0,768 | -0,768 | -0,768 |
| -0,457 | -0,457 | -0,457 | -0,457 |
| -0,156 | -0,156 | -0,156 | -0,156 |
| 9,817 | 9,817 | 9,817 | 9,817 |
| 11,914 | 11,914 | 11,914 | 11,914 |
| 9,263 | 9,263 | 9,263 | 9,263 |
| 14,789 | 14,789 | 14,789 | 14,789 |
| 7,290 | 7,290 | 7,290 | 7,290 |
| 7,478 | 7,478 | 7,478 | 7,478 |
| 7,783 | 7,783 | 7,783 | 7,783 |
| 8,164 | 8,164 | 8,164 | 8,164 |
| 14,301 | 14,301 | 14,301 | 14,301 |
| 21,973 | 21,973 | 21,973 | 21,973 |
| 11,089 | 11,089 | 11,089 | 11,089 |
| 10,866 | 10,866 | 10,866 | 10,866 |
| 11,873 | 11,873 | 11,873 | 11,873 |
| 17,627 | 17,627 | 17,627 | 17,627 |
| 7,242 | 7,242 | 7,242 | 7,242 |
| 9,397 | 9,397 | 9,397 | 9,397 |
| Painel C: Outros Modelos | | | |
| KS | 2,994 | log_dp | -0,994 |
| SIC Forecasts | 0,592 | log_dy | -1,633 |
| POOL-SMA | -1,977 | log_ep | -1,563 |
| DMSFE | -1,389 | log_de | -2,692 |
| FATORES Todas as variáveis | -0,257 | svar | -1,475 |
| FATORES Variáveis Macro | 0,560 | bm | -0,499 |
| | | ntis | 1,012 |
| | | T_bill | 1,538 |
| | | lty | 1,220 |
| | | ltr | -0,927 |
| | | ts | 0,942 |
| | | dfy | 0,0442 |
| | | dfr | -1,400 |
| | | inf | -0,354 |
| Painel D: Regressões Bivariadas | | | |
| | 11,320 | | -2,726 |
| | 6,268 | | -3,493 |
| | 11,234 | | -3,409 |
| | -12,352 | | -4,904 |
| | 9,140 | | -4,619 |
| | 6,321 | | -3,837 |
| | | | 2,622 |
| | | | 1,437 |
| | | | 1,997 |
| | | | 1,997 |
| | | | -3,351 |
| | | | -2,088 |
| | | | -1,111 |
| | | | 10,962 |
| | | | -5,740 |

Table 6: Resultados Out-sample: Parte B

| | | R_{OSS}^2 | | | | | |
|---|--|-------------|--------|----------|--------|----------|--------|
| Painel A: Fatorial com DMA - Todas as variáveis | | Geral | | Recessão | | Expansão | |
| FDMA (0.95,0.95) | | -0,14 | [0,29] | -14,38 | [0,27] | -13,24 | [0,39] |
| Lasso-FDMA (0.95,0.95) | | -0,14 | [0,30] | -15,00 | [0,31] | -12,53 | [0,38] |
| LAR-FDMA (0.95,0.95) | | -0,16 | [0,40] | -14,65 | [0,34] | -19,10 | [0,48] |
| CFPC-FDMA (0.95,0.95) | | -0,16 | [0,29] | -17,35 | [0,32] | -15,93 | [0,37] |
| FDMA (0.95,0.99) | | -0,13 | [0,42] | -12,66 | [0,40] | -14,23 | [0,47] |
| Lasso-FDMA (0.95,0.99) | | -0,12 | [0,42] | -12,77 | [0,40] | -12,11 | [0,47] |
| LAR-FDMA (0.95,0.99) | | -0,13 | [0,45] | -13,21 | [0,40] | -15,50 | [0,51] |
| CFPC-FDMA (0.95,0.99) | | -0,13 | [0,43] | -13,17 | [0,43] | -14,83 | [0,47] |
| FDMA (0.99,0.95) | | -0,03 | [0,33] | -2,94 | [0,34] | -3,60 | [0,39] |
| Lasso-FDMA (0.99,0.95) | | -0,03 | [0,33] | -2,94 | [0,34] | -3,60 | [0,39] |
| LAR-FDMA (0.99,0.95) | | -0,04 | [0,73] | -3,95 | [0,80] | -4,65 | [0,59] |
| CFPC-FDMA (0.99,0.95) | | -0,04 | [0,23] | -4,64 | [0,41] | -2,82 | [0,23] |
| FDMA (0.99,0.99) | | -0,03 | [0,55] | -2,73 | [0,57] | -4,15 | [0,51] |
| Lasso-FDMA (0.99,0.99) | | -0,03 | [0,55] | -2,73 | [0,57] | -4,15 | [0,51] |
| LAR-FDMA (0.99,0.99) | | -0,03 | [0,79] | -3,70 | [0,85] | -4,26 | [0,62] |
| Painel A: Fatorial com DMA - Variáveis Macro | | Geral | | Recessão | | Expansão | |
| FDMA (0.95,0.95) | | -0,13 | [0,23] | -14,84 | [0,32] | -9,30 | [0,28] |
| Lasso-FDMA (0.95,0.95) | | -0,12 | [0,15] | -15,68 | [0,36] | -6,08 | [0,15] |
| LAR-FDMA (0.95,0.95) | | -0,15 | [0,23] | -16,47 | [0,38] | -12,13 | [0,24] |
| CFPC-FDMA (0.95,0.95) | | -0,16 | [0,34] | -17,21 | [0,32] | -15,61 | [0,43] |
| FDMA (0.95,0.99) | | -0,12 | [0,39] | -12,72 | [0,40] | -13,54 | [0,44] |
| Lasso-FDMA (0.95,0.99) | | -0,12 | [0,37] | -12,51 | [0,40] | -12,94 | [0,40] |
| LAR-FDMA (0.95,0.99) | | -0,13 | [0,41] | -13,12 | [0,42] | -14,68 | [0,45] |
| CFPC-FDMA (0.95,0.99) | | -0,13 | [0,42] | -13,19 | [0,40] | -14,70 | [0,47] |
| FDMA (0.99,0.95) | | -0,02 | [0,30] | -2,99 | [0,40] | -1,62 | [0,32] |
| Lasso-FDMA (0.99,0.95) | | -0,00 | [0,10] | -3,48 | [0,44] | 5,17 | [0,08] |
| LAR-FDMA (0.99,0.95) | | -0,03 | [0,33] | -4,58 | [0,66] | -0,16 | [0,23] |
| CFPC-FDMA (0.99,0.95) | | -0,03 | [0,33] | -3,34 | [0,37] | -3,58 | [0,38] |
| FDMA (0.99,0.99) | | -0,02 | [0,47] | -2,70 | [0,58] | -2,48 | [0,41] |
| Lasso-FDMA (0.99,0.99) | | -0,01 | [0,24] | -2,96 | [0,64] | 2,43 | [0,17] |
| LAR-FDMA (0.99,0.99) | | -0,03 | [0,50] | -3,80 | [0,80] | -1,38 | [0,32] |
| CFPC-FDMA(0.99; 0.99) | | -0,02 | [0,51] | -2,47 | [0,51] | -3,86 | [0,51] |