



# Mecanismos de Seleção de Gale-Shapley Dinâmicos em Universidades Brasileiras: SISU, SISU $_{\alpha}$ , SISU $_{\beta}$

Luis Abreu José Raimundo Carvalho

## UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA - CAEN

## SÉRIE ESTUDOS ECONÔMICOS - CAEN Nº 08

Mecanismos de Seleção de Gale-Shapley Dinâmicos em  $\mbox{Universidades Brasileiras: SISU, SISU}_{\alpha}, \mbox{SISU}_{\beta}$ 

### Mecanismos de Seleção de Gale-Shapley Dinâmicos em Universidades Brasileiras: SISU, $SISU_{\alpha}$ , $SISU_{\beta}$

#### Luis Abreu

Departamento de Matemática/Universidade Estadual Vale do Acaraú Laboratório de Econometria e Otimização/CAEN/UFC luiscarlos.mat@gmail.com

#### José Raimundo Carvalho

CAEN/Universidade Federal do Ceará Laboratório de Econometria e Otimização/CAEN/UFC josecarv@ufc.br

#### Resumo

No Brasil, a busca pela redução das ineficiências observadas na alocação de vagas em instituições de ensino superior via o tradicional vestibular levou à formulação e implantação de um mecanismo alternativo de seleção para admissão superior: o Sistema de Seleção Unificada (SISU), criado em 2010. O mecanismo é um algoritmo de matching com as seguintes características: (i) cada estudante que recebe oferta de matrícula decide por aceitar ou rejeitar a oferta recebida; (ii) rejeições de ofertas provocam a realização de novas propostas; e (iii) propostas são aceitas temporariamente, podendo cada oferta aceita ser "trocada" por uma oferta considerada "melhor". Ou seja, o SISU é um mecanismo semelhante ao Algoritmo Deferred Acceptance (Algoritmo Gale-Shapley) com os cursos propondo. Apesar da importância do SISU. a literatura econômica sobre suas especificidades é praticamente inexistente. Neste trabalho busca-se entender e caracterizar os incentivos propiciados pelo SISU através de dois novos mecanismos teóricos desenvolvidos, o SISU $_{\alpha}$  e o SISU $_{\beta}$ . Ambos são modelados como mecanismos de matching dinâmicos. Caracterizamos estratégias não dominadas para o  $SISU_{\beta}$  e o  $SISU_{\alpha}$ . Utilizando o SISU, como a melhor aproximação disponível para o SISU, concluímos que a introdução do SISU apresentou um importante avanço em relação ao vestibular em termos de ganhos de eficiência do *matching* entre alunos e cursos.

Palavras-chave: SISU, Mecanismo de Gale-Shapley, Modelos de Matching.

#### Abstract

In Brazil, the quest for reducing observed inefficiencies in the allocation of seats in higher education institutions through traditional examination (Vestibular) led to the formulation and implementation of an alternative mechanism of selection: the Unified Selection System (SISU), created in 2010. The mechanism is a matching algorithm with the following characteristics: (i) each student who receives an offer decides to accept or reject the received offer; (ii) rejections of offers prompt new proposals; (iii) proposals are accepted temporarily, and each offer can be "replaced" by an offer considered "better". That is, the SISU is a mechanism similar to the College-Proposing Deferred Acceptance Algorithm (College-Proposing Gale-Shapley Algorithm). Despite the importance of SISU, the economic literature about its specificities is practically nonexistent. In this work we seek to understand and characterize the incentives provided by SISU through two new developed theoretical mechanisms, the SISU $_{\alpha}$  and SISU $_{\beta}$ . Both are modeled as dynamic matching mechanisms. We characterize undominated strategies for SISU $_{\beta}$  and SISU $_{\alpha}$ . Using SISU $_{\alpha}$  as the best approximation available to SISU, we conclude that the introduction of SISU showed a significant improvement on Vestibular in terms of gains of efficiency from matching between students and courses.

Keywords: SISU, Gale-Shapley Mechanism, Matching Models.

JEL Classification: C73, C78, I28.

#### 1 Introdução

No Brasil, as instituições de ensino superior públicas detêm status de maior qualidade em relação às privadas. Bons cursos sofrem grande procura e a ocupação de uma de suas vagas torna-se resultado de uma competitiva disputa. A correlação entre anos de estudo e produtividade, juntamente com a assimetria de informação no mercado de trabalho quanto ao nível de produtividade do trabalhador, faz com que este se utilize de maior "consumo" de anos de educação como um mecanismo de sinalização de sua maior produtividade. Portanto, acesso a um ensino de maior qualidade traduz-se em uma expectativa de maior poder competitivo no mercado de trabalho, consequentemente alcance a melhores empregos, maiores salários e possibilidades de melhores condições de vida. No entanto, qual seria o papel fundamental do ensino superior?

Arrow (1973) contrasta o habitual ponto de vista de que o estudante tem suas habilidades/produtividade aprimoradas através da educação superior e que, portanto, esta acresce o valor de mercado de seu trabalho, com uma visão da educação como um filtro. Assim, Arrow explora a possibilidade de que ao invés da educação superior contribuir acrescendo as habilidades cognitivas ou de socialização do indivíduo, esta serviria como uma ferramenta de classificação de indivíduos em diferentes níveis de habilidade e aponta para o fato de que se a seleção dos estudantes é tal que a produtividade esperada dos admitidos é maior do que a dos rejeitados, então o procedimento de admissão tem poder preditivo.

Nos últimos anos, surgiu no Brasil uma preocupação com o supracitado poder da educação em propiciar ascensão social como gerador de desigualdade social, o que fez com que o processo de seleção deixasse suas origens de privilégio exclusivo à meritocracia e passasse a considerar fatores socioeconômicos dos participantes, comumente através da adoção de cotas.

Os procedimentos utilizados no processo pelo qual os estudantes são selecionados para ingresso no ensino superior, *processos de admissão*, variam amplamente de país a país. Helms (2008) descreve os principais formatos utilizados nos processos de admissão de diversos países ao redor do mundo. Os fatores apontados por Helms como mais comumente considerados no processo de admissão podem ser agrupados em quatro principais categorias: exames, preparação secundária, matérias de aplicação e fatores demográficos.

No Brasil, durante quase um século, o sistema de seleção utilizado foi predominantemente o vestibular, sistema descentralizado de seleção que por vezes leva o concorrente a um trade-off: concorrer à vaga em seu curso de maior preferência ou a um curso menos preferível mas para o qual este dispunha de maiores chances de aprovação. Os males desse trade-off vão da alocação ineficiente das vagas<sup>2</sup> a, consequentemente, maiores taxas de evasão.

Sob a ótica da teoria econômica as instituições de ensino superior (IES) e os estudantes que buscam entrada no ensino superior são tratados como agentes possuindo preferências sobre os indivíduos do outro grupo. O problema de parear estudantes e vagas é chamado *School Choice* (ou *College Admission*, ou ainda *Student Placement*) e o processo pelo qual o pareamento é realizado de um *mecanismo de matching*. Desde os trabalhos seminais de Gale and Shapley

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Ver Spence (1973).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>A ineficiência aqui apontada refere-se ao fato de que sendo o vestibular um ambiente de incerteza e grande competitividade e, diante da restrição imposta aos estudantes quanto ao número de cursos a que se pode concorrer (a saber, um único), o estudante age muito provavelmente de modo estratégico e, de modo geral, o resultado será uma alocação instável.

(1962), Dubins and Freedman (1981), Balinski and Sönmez (1999) e Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003a), essa área de pesquisa se desenvolveu enormemente, sendo, inclusive, razão do prêmio Nobel em 2012.<sup>3</sup>

Não é de hoje que são conhecidas as vantagens da utilização de um mecanismo de *matching* no pareamento de indivíduos, tampouco é exclusividade do sistema educacional. Mecanismos de *matching* têm sido utilizados nos mercados imobiliário (Hylland and Zeckhauser, 1979), de transplante de órgãos (Roth, Sönmez, and Ünver, 2004), de trabalho (Kelso Jr. and Crawford, 1982), etc. De uma maneira geral, essa literatura contribuiu decisivamente para diminuir os problemas encontrados em mecanismos de *matching* ineficientes.

No Brasil, a busca pela redução de certa ineficiência observada na alocação das vagas em instituições de ensino superior via vestibular levou à formulação e implantação de um mecanismo alternativo de seleção para admissão superior. Tendo início com a implantação, em 1998, de um exame nacional (Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM), aos poucos ajustado para servir como exame de seleção para o ensino superior. Sendo seguido em 2010 da implementação de um sistema de seleção unificado (SISU), servindo de canal de oferta e demanda por vagas no ensino superior e responsável pela alocação das mesmas. Apesar da importância do SISU, a literatura econômica sobre suas especificidades é praticamente inexistente. Nesse sentido, o presente trabalho buscou, sob a luz da teoria dos jogos, entender os incentivos dados pelo Sistema de Seleção Unificado (SISU) através do desenvolvimento e análise de modelos estilizados, i.e., dos mecanismos SISU $_{\alpha}$  e SISU $_{\beta}$ . Estes são modelados como mecanismos de *matching* dinâmicos e para os mesmos caracterizamos estratégias não dominadas.

Os resultados encontrados para os mecanismos propostos e as similaridades destes com o mecanismo do SISU sinalizam para o fato de que fatores externos<sup>4</sup> sejam os únicos responsáveis pelos altos índices de não matrícula em primeira chamada observados no SISU.<sup>5</sup>

Além desse capítulo introdutório, desenvolvemos os resultados em três capítulos adicionais.

Na seção 2, introduzimos os principais conceitos e definições utilizados no trabalho. Na seção 3, descrevemos variados mecanismos de *matching* (Boston, Shanghai, *deferred acceptance*, *top trading cycles* e o vestibular) analisando cada um destes segundo o atendimento ou não às propriedades de estabilidade, Pareto eficiência e não manipulabilidade. Na seção 4, fazemos uma descrição do SISU, apontando o uso do mecanismo *deferred acceptance* durante suas etapas. Na seção 5, apresentamos modelos estilizados do SISU e a partir destes analisamos características do SISU em relação ao vestibular. Na seção 6, tecemos considerações finais. Finalmente, apresentamos as demonstrações no apêndice.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Laureado a Alvin E. Roth e Lloyd S. Shapley.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Utilizamos o termo fatores externos para nos referir a fatores não incorporados ao modelo. A influência desses fatores é percebida pela observância, na prática, de comportamento estratégico dos jogadores não justificado pelo modelo teórico.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Embora não haja divulgação oficial do Ministério da Educação acerca do percentual de alunos que não realiza matrícula em primeira ou segunda chamadas, são frequentes notícias apontando para a grande magnitude destes valores. Ver, por exemplo, Cieglinski (2012) ou Universidade Federal do Ceará. (2013).

#### 2 School Choice

Um *problema de school choice*<sup>6</sup> constitui-se de dois conjuntos disjuntos: um conjunto de estudantes e um conjunto de cursos. Cada estudante possui preferências estritas em relação aos cursos e a opção de não estudar. Cada curso possui preferências estritas em relação aos estudantes (individualmente) e a opção de manter uma vaga desocupada além de uma quantidade fixa de vagas disponíveis.

Formalmente, um problema de school choice é uma quíntupla  $(S,C,P_S,P_C,q)$  consistindo de

```
i.Um conjunto de estudantes S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\};
```

```
ii.Um conjunto de cursos C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\};
```

iii.Uma lista de preferências dos estudantes  $P_S = (P_{s_1}, P_{s_2}, \dots, P_{s_n})$ , onde  $P_s$  é a relação de preferências estritas do estudante s em relação aos cursos, incluindo a opção de não estudar,  $C \cup \{\varnothing\}$ ;

iv.Uma lista de preferências dos cursos  $P_C = (P_{c_1}, P_{c_2}, \dots, P_{c_m})$  onde  $P_c$  é a relação de preferências estritas do curso c em relação aos estudantes (individualmente) incluindo a opção de manter uma vaga desocupada,  $S \cup \{\emptyset\}$ ;

v.Um vetor de capacidades  $q=(q_{c_1},q_{c_2},\ldots,q_{c_m})$ , onde  $q_c$  é um número inteiro positivo indicando o número máximo de estudantes que podem ser admitidos no curso c.

Uma solução particular para um problema de *school choic*e é um *matching* – uma alocação de estudantes aos cursos, onde cada estudante é designado a um único curso (ou sua opção externa) e a cada curso se designa um número de estudantes não superior ao seu número de vagas. Descreveremos um *matching* por uma função  $\mu:S\longrightarrow C\cup\{\varnothing\}$  satisfazendo  $|\mu^{-1}(c)|\leq q_c$  para todo  $c\in C$ . Onde  $|\mu^{-1}(c)|$  denota a cardinalidade do conjunto  $\{s\in S:\mu(s)=c\}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Ver Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003b)

Uma importante propriedade na teoria de *matching* é a propriedade de *estabilidade*. Um *matching* é estável se

•ele é individualmente racional, i.e., para todo par (s,c) com  $\mu(s)=c$  tem-se  $c\succ_s\varnothing$  e  $s\succ_c\varnothing$ , e

•ele é *não bloqueado por pares*, i.e., para todo par (s,c) com  $c \succ_s \mu(s)$  tem-se que  $s' \succ_c s$  para todo  $s' \in \mu(c)^{-1}$  e, se  $|\mu(c)^{-1}| < q_c$  então  $\varnothing \succ_c s$ .

Outras propriedades de um matching são:

- •não desperdício, onde para todo par (s,c) se  $c \succ_s \mu(s)$  então  $|\mu(c)^{-1}| = q_c$ ;
- •Pareto eficiência, se não existe matching  $\mu'$  tal que  $\mu'(s) \succeq_s \mu(s)$  para todo  $s \in S$  e  $\mu'(s) \succ_s \mu(s)$  para algum  $s \in S$ .

Um *mecanismo de matching* é um procedimento que determina um *matching* para cada problema de *school choice*. Consideraremos que os cursos têm suas preferências provenientes de critérios previamente estabelecidos e de conhecimento comum (o que é o caso para as instituições de ensino superior públicas no Brasil). No entanto, as preferências dos estudantes são de conhecimento privado, somente o próprio estudante conhece suas preferências. Assim sendo, o mecanismo deve requerer dos estudantes o anúncio de suas preferências. Desta forma, seja  $Q_s$  as preferências anunciadas pelo estudante s e denote o perfil de preferências anunciadas por  $Q = (Q_{s_1}, Q_{s_2}, \ldots, Q_{s_n})$ . E, ainda, Q é o espaço de todos os possíveis anúncios dos estudantes. Dessa forma, um mecanismo de *matching* traduz-se numa função com domínio em  $(S, C, Q, P_C, q)$  e imagem no espaço  $\mathcal M$  de *matchings* entre S e C. Como Q é o único elemento do domínio que não é primitivo do problema de *school choice* escreveremos somente  $\varphi: \mathcal Q \longrightarrow \mathcal M$ .

Se  $\phi(Q)$  é sempre estável com respeito às preferências anunciadas Q, ele será dito um *mecanismo de matching estável*. Se  $\phi(Q)$  é sempre Pareto eficiente com relação às preferências anunciadas Q então ele será dito um *mecanismo de matching Pareto eficiente*.

Observe que estabilidade e optimabilidade de Pareto do mecanismo são definidas em relação às preferências anunciadas, Q, e não às verdadeiras preferências dos estudantes, P<sub>S</sub>. Deste modo, o *matching* só será realmente estável ou Pareto eficiente se os estudantes anunciarem suas verdadeiras preferências. Mas como ter certeza de que os estudantes revelarão suas verdadeiras preferências? Evidentemente, se um estudante por qualquer razão é levado a crer que o anúncio de um ordenamento de preferências diferente de suas verdadeiras preferências leva-o a um *matching* preferível,<sup>7</sup> esse assim o fará, pois o estudante é um agente racional.

Deste modo, podemos definir um jogo em forma estratégica  $\langle S, \mathcal{Q}, \phi, P_S \rangle$ , onde os jogadores são dados pelo conjunto S de estudantes, o espaço de estratégias é dado pelo espaço  $\mathcal{Q}$  de todos os possíveis anúncios de preferências dos estudantes. O resultado de uma dada estratégia Q adotada é dado pelo *matching*  $\mu = \phi(Q)$ , através da função *payoff*,  $\phi$ , (mecanismo de *matching* adotado pelo matchmaker). As preferências dos jogadores são dadas pelas verdadeiras preferências dos estudantes  $P_S$ . Tal jogo é chamado o *jogo induzido pelo mecanismo*  $\phi$ . Portanto,

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>As propriedades dos *matchings* são avaliadas pelo *matchmaker* em termos de preferências anunciadas devido seu desconhecimento das verdadeiras preferências dos estudantes. Entretanto, os estudantes avaliarão o *matching* em termos de suas verdadeiras preferências.

os mecanismos podem e devem ser analisados sob a ótica da teoria dos jogos. Nesse contexto, a expressão "jogar" o mecanismo possui uma adequação evidente.

Uma estratégia  $Q_s^*$  é dita *dominante* para um agente s se é uma melhor resposta a todos os possíveis conjuntos de estratégias  $Q_{-s}$  adotadas pelos demais agentes, isto é,  $\phi(Q_s^*,Q_{-s})\succeq_s \phi(Q_s,Q_{-s})$  para todos  $Q_s\in\mathcal{Q}_s$  e  $Q_{-s}\in\mathcal{Q}_{-s}$ . E, um mecanismo de *matching*  $\phi$  será dito *não manipulável* (ou à *prova de estratégia*) se para cada jogador é estratégia dominante anunciar suas verdadeiras preferências no jogo induzido pelo mecanismo  $\phi$ .

Nesta seção, analisamos alguns dos principais mecanismos de *matching* utilizados: *deferred acceptance*, Boston e *top trading cycles*. São apresentados seus algoritmos bem como apontada a satisfação ou não de certas propriedades teóricas por cada um destes. Além disso, são acrescentados aos mecanismos supracitados o peculiar mecanismo de Shanghai, e um mecanismo historicamente utilizado no Brasil, a saber, o Vestibular. Espera-se, nesta seção, não só apresentar ao leitor diferentes mecanismos de admissão utilizados, mas também introduzir ideias que darão suporte para o cumprimento de nosso objetivo principal: a modelagem e apresentação de características do mecanismo do SISU.

#### 3 Alguns Mecanismos de Matching

Nesta seção, analisamos diversos mecanismos de *matching: deferred acceptance*, Boston, Shanghai, *top trading cycles* e um mecanismo historicamente utilizado no Brasil, a saber, o vestibular. Para traçarmos uma análise comparativa entre mecanismos tradicionais e o vestibular e, posteriormente, deste com o SISU, apresentamos seus algoritmos e apontamos a satisfação ou não de certas propriedades teóricas por cada um destes.

#### 3.1 Deferred acceptance (Gale-Shapley)

Em 1962 com o artigo "College Admission and the Stability of Marriage", David Gale e Lloyd Shapley apresentaram o problema enfrentado por um curso que dispondo de q vagas e n candidatos (n>q) e suas respectivas qualificações deve decidir que candidatos admitir. Tendo em mente que nem todas as ofertas de admissão serão aceitas, o curso enfrenta o dilema de quantas admissões oferecer. Por outro lado, candidatos tendo também aplicado para outros cursos enfrentam o dilema de aceitar uma admissão já oferecida ou aguardar na esperança de ser admitido em um curso de maior preferência. Sem a pretensão de solucionar esses problemas, mas sim a de apresentar ideias úteis em certas fases do problema de admissão, Gale e Shapley propuseram os seguintes algoritmos: Deferred acceptance com estudantes propondo e deferred acceptance com cursos propondo.

#### Algoritmo Deferred Acceptance com Estudantes Propondo

- i.Cada curso possui preferências em relação aos estudantes.
- ii.Cada estudante submete um anúncio de preferências em relação aos cursos.

 $<sup>^{8}</sup>$ Jogos nos quais os jogadores devem anunciar suas preferências são algumas vezes chamados *jogos de revelação*, e o mecanismo  $\phi$  é chamado *mecanismo de revelação*.

- iii.Os estudantes são alocados baseado em suas preferências anunciadas e nas preferências dos cursos.
  - *Etapa 1:* Cada estudante envia proposta a seu curso preferido. Cada curso considera seus proponentes, designando, *temporariamente*, vaga para estes um a um, seguindo sua ordem de preferência, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.
  - Etapa k,  $k \ge 2$ : Cada estudante rejeitado na etapa anterior envia proposta a seu curso preferido dentre aqueles que não o rejeitaram ainda. Cada curso considera seus novos proponentes juntamente com os não rejeitados na etapa anterior, designando, *temporariamente*, vaga para estes um a um, seguindo sua ordem de preferência, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

O algoritmo termina quando nenhum estudante é rejeitado ou quando os rejeitados já propuseram a todos os cursos por eles desejáveis. As alocações finais passam de temporárias para definitivas.

O mecanismo *deferred acceptance* com estudantes propondo é estável e, embora não seja Pareto eficiente é Pareto superior a qualquer outro mecanismo estável (Gale and Shapley, 1962). Uma outra importante propriedade desse mecanismo é sua não manipulabilidade (Dubins and Freedman, 1981; Roth, 1982).

#### Algoritmo Deferred Acceptance com Cursos Propondo

- i.Cada curso possui preferências em relação aos estudantes.
- ii.Cada estudante submete um anúncio de preferências em relação aos cursos.
- iii.Os estudantes são alocados baseado em suas preferências anunciadas e nas preferências dos cursos.
  - Etapa 1: Cada curso envia proposta a seus  $q_{c,0}=q_c$  estudantes preferidos. Cada estudante considera seus proponentes, ocupando, *temporariamente*, vaga no curso aceitável que lhe é preferido dentre estes e rejeitando os demais. Ao fim dessa etapa, cada curso c terá sido rejeitado por  $q_{c,1}$  estudantes,  $0 \le q_{c,1} \le q_c$ .
  - Etapa k,  $k \ge 2$ : Cada curso envia proposta a seus  $q_{c,k-1}$  estudantes preferidos dentre aqueles para os quais não realizou proposta em etapas anteriores. Cada estudante considera seus novos proponentes juntamente com o curso não rejeitado na etapa anterior, ocupando, *temporariamente*, vaga no curso aceitável que lhe é preferido dentre estes e rejeitando os demais. Ao fim dessa etapa cada curso c terá sido rejeitado por  $q_{c,k}$  estudantes,  $0 \le q_{c,k} \le q_c$ .

O algoritmo termina quando nenhum curso é rejeitado ou quando os rejeitados já propuseram a todos os estudantes por eles desejáveis. As alocações finais passam de temporárias para definitivas.

O mecanismo *deferred acceptance* com cursos propondo é estável (Gale and Shapley, 1962). Não sendo, no entanto, Pareto eficiente ou não manipulável (Roth, 1982).

#### 3.2 Boston

Segundo Chen and Kesten (2011), é o mais comum mecanismo de *school choice* observado em prática. Nomeado devido a seu uso pela cidade de Boston,<sup>9</sup> Massachusetts, realiza o *matching* segundo o seguinte algoritmo:

#### Algoritmo de Boston

- i.Para cada curso prioridades (preferências) sobre os alunos são determinadas a partir de critérios previamente estabelecidos e de comum conhecimento.<sup>10</sup>
- ii.Cada estudante submete um anúncio de preferências em relação aos cursos.
- iii.Os estudantes são alocados baseado em suas preferências anunciadas e em suas prioridades nos cursos.
  - *Etapa* 1: Cada estudante envia proposta à sua primeira escolha de curso. Cada curso considera seus proponentes e designa, *definitivamente*, vaga para estes um a um, seguindo sua ordem de preferência, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.
  - Etapa k,  $k \ge 2$ : Cada estudante rejeitado na etapa anterior envia proposta à sua k-ésima escolha de curso. Cada curso com vagas remanescentes considera seus proponentes e designa, definitivamente, vaga para estes um a um, seguindo sua ordem de preferência, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.
- O algoritmo termina quando não houver mais vagas desocupadas nem propostas a serem atendidas.
- O mecanismo de Boston não é estável e é manipulável, todavia, sob a hipótese de não desperdício, é Pareto eficiente (Abdulkadiroğlu and Sönmez, 2003b).

#### 3.3 Shanghai

Chen and Kesten (2011) descrevem uma classe de mecanismos utilizados na China para admissão na faculdade, chamada de *Chinese parallel mechanisms*. O membro mais simples dessa classe é o mecanismo de Shanghai, utilizado desde 2003 na cidade homônima. A seguir apresentamos um algoritmo descrevendo o processo segundo o qual esse mecanismo realiza o *matching*.

#### Algoritmo de Shanghai

i.Para cada curso uma preferência em relação aos alunos é determinada baseada, predominantemente, na nota obtida pelo estudante em testes padronizados.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>O mecanismo a seguir definido foi utilizado de 1989 a 2005, para a alocação de estudantes em escolas de ensino primário e secundário.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Nas escolas de Boston, os critérios utilizados para determinação das prioridades sofreram constantes modificações durante o período de adoção deste mecanismo, mas predominantemente foram os seguintes: escolha dos pais, estudantes em educação especial e bilíngue, irmãos concorrendo por vaga em mesma escola e proximidade da escola levando em consideração zonas na qual a cidade foi dividida (Boston Public Schools. 2012).

- ii.Cada estudante submete um anúncio de preferências sobre os cursos.<sup>11</sup>
- iii.Os estudantes são alocados baseado em suas preferências anunciadas e nas preferências dos cursos.

#### Primeira rodada

*Etapa 1:* Cada estudante envia proposta ao seu curso preferido. Cada curso considera seus proponentes, designando, *temporariamente*, vaga para estes um a um, seguindo sua ordem de preferência, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

Etapa 2: Cada estudante rejeitado na etapa anterior envia proposta à sua segunda opção de curso. Cada curso considera seus novos proponentes juntamente com os não rejeitados na etapa anterior (aqueles aceitos temporariamente), designando *definitivamente* vaga para estes um a um, seguindo sua ordem de preferência, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

#### k-ésima rodada, $k \ge 2$

Etapa 1: Cada estudante rejeitado na rodada anterior envia proposta ao seu curso preferido dentre aqueles que não o rejeitaram ainda. Cada curso com vagas remanescentes considera seus proponentes, designando, temporariamente, vaga para estes um a um, seguindo sua ordem de preferência, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

Etapa 2: Cada estudante rejeitado na etapa anterior envia proposta ao seu curso preferido dentre aqueles que não o rejeitaram ainda. Cada curso considera seus novos proponentes juntamente com os não rejeitados na etapa anterior (aqueles aceitos temporariamente), designando definitivamente vaga para estes um a um, seguindo sua ordem de preferência, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

O algoritmo termina quando nenhum estudante é rejeitado ou quando os rejeitados já propuseram a todos os cursos por eles desejáveis.

O mecanismo de Shanghai não é estável ou Pareto eficiente e é manipulável (Chen and Kesten, 2011).

#### 3.4 Top Trading Cycles

Em seu artigo "On Cores and Indivisibility" Shapley and Scarf (1974) exploram a mais simples economia de trocas (cada indivíduo possuindo apenas um bem indivisível). Eles mostram a existência de um core para seu modelo e apresentam um algoritmo para alcançá-lo, o algoritmo top trading cycles, o qual atribuem a David Gale. O algoritmo top trading cycles tem sido utilizado com enorme sucesso no mercado estadunidense de transplantes de rins e começa a ser utilizado também em problemas de school choice.<sup>12</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Existem variações regionais quanto ao *timing* da submissão de preferências dos estudantes: antes do exame (9 províncias), depois do exame, mas antes do conhecimento dos escores do exame (1 província), e depois do conhecimento do escore dos exames (21 províncias).

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Apesar de ter sido recomendado pela Fórça-Tarefa de Alocação Estudantil das Escolas Públicas de Boston (BPS Student Assignment Task Force) como mecanismo para substituição do mecanismo de Boston, o mecanismo *top trading cycles* passou a ser utilizado na alocação estudantil apenas em 2012, pela cidade de Nova Orleães, Luisiana. (Sönmez 2012)

Para a descrição do mecanismo *top trading cycles* precisaremos estabelecer a definição de um ciclo. Um *ciclo* é uma lista ordenada de distintos cursos e estudantes da forma  $(c_1, s_1, c_2, s_2, \ldots, c_k, s_k)$ , onde  $c_1$  escolhe  $s_1$ ,  $s_1$  escolhe  $c_2$ ,  $c_2$  escolhe  $s_2$ ,  $\ldots$ ,  $c_k$  escolhe  $s_k$  e  $s_k$  escolhe  $c_1$ .

#### Algoritmo Top Trading Cycles

- i.Cada curso possui preferências em relação aos estudantes.
- ii.Cada estudante submete um anúncio de preferências em relação aos cursos.
- iii.Os estudantes são alocados baseado em suas preferências anunciadas e nas preferências dos cursos.

#### Primeira rodada

- Etapa 1: Admite-se que cada estudante deseja algum curso e vice-versa. Designe um contador para cada curso (informando a quantidade de vagas disponíveis no curso). Seu valor inicial é a capacidade do curso.
- Etapa 2: Cada estudante "aponta" para seu curso favorito e cada curso "aponta" para seu estudante favorito. Existe pelo menos um ciclo. Cada estudante em um ciclo é designado a uma vaga no curso "apontado" e removido do processo. O contador de cada curso em um ciclo é reduzido em um, e se este se torna zero (isto é, se o curso teve todas as suas vagas ocupadas), o curso também é removido do processo. Contadores dos demais cursos mantêm-se inalterados.

#### k-ésima rodada, $k \ge 2$

- Etapa 1: Estudantes/cursos que não desejam qualquer dos cursos/estudantes remanescentes são sistematicamente removidos do processo, recebendo sua opção exterior/mantendo as vagas restantes desocupadas, até que cada estudante que deseje algum dos cursos restantes e vice-versa.
- Etapa 2: Cada estudante remanescente "aponta" para seu curso favorito dentre os cursos remanescentes e cada curso remanescente "aponta" para seu favorito dentre os estudantes remanescentes. Existe pelo menos um ciclo. Cada estudante em um ciclo é designado a uma vaga no curso "apontado" e removido do processo. O contador de cada curso em um ciclo é reduzido em um, e se este se torna zero, o curso também é removido do processo. Contadores dos demais cursos mantêm-se inalterados.
  - O algoritmo termina quando não há mais estudantes ou cursos remanescentes.
- O mecanismo *Top Trading Cycles* é Pareto eficiente e não manipulável (Abdulkadiroğlu and Sönmez, 2003b). Entretanto, não é estável.

#### 3.5 Vestibular

No Brasil, ao longo dos anos se estabeleceram diversas formas de exames de admissão, mas o vestibular tradicional, o mais frequente, é realizado em sua grande maioria em duas

etapas. Na UFC, a primeira etapa é composta por questões objetivas de múltipla escolha, comuns a todos os candidatos de todos os cursos e a segunda etapa é composta por questões discursivas relacionadas à área do curso escolhido.

Diferentemente dos mecanismos até então abordados, o mecanismo vestibular é "descentralizado" no sentido de que ele ocorre no âmbito de uma única instituição. Assim, apesar de agregar uma série de cursos e sua modelagem (no âmbito institucional) ser análoga à modelagem até então abordada (modelagem de mecanismos centralizados) devemos ter em mente que o estudante é passível de participação em diferentes mecanismos de vestibular, e muito embora os algoritmos de *matching* destes sejam independentes, a efetivação dos *matchings* (isto é, a aceitação por parte do estudante do *matching* resultante de um algoritmo de vestibular no qual este participe.

A distinção nesse modelo faz-se presente, então, na opção externa do indivíduo. Relembremos que a opção externa foi definida como *trade-offs* enfrentados pelo estudante ao encarar a oportunidade de estudar em um dos cursos, tais como, estudar em uma instituição não listada no problema, trabalhar, etc. Deste modo, a opção externa se traduz como um valor esperado do estudante "de tudo o que é alheio ao problema modelado". Portanto, o conjunto de cursos aceitáveis deixa de ser estático, isto é, ao participar de um vestibular, se o estudante escolhe um curso que é ex-ante preferível a sua opção externa, a aprovação do estudante nesse curso não significa a aceitação do mesmo pelo referido estudante, uma vez que *ex-post* este curso pode não ser preferível à sua opção externa se o estudante participou de um diferente mecanismo de vestibular e foi aceito em um curso melhor.

Apesar disso, continuaremos a expressar a opção externa do estudante como algo estático. Reconhecemos a fragilidade do modelo a seguir apresentado, no entanto, essa modelagem servirá de base para o próximo mecanismo.<sup>13</sup>

#### Algoritmo Vestibular

- i.Cada estudante escolhe e anuncia um único curso como o de sua preferência.
- ii.Para cada curso uma preferência em relação a estudantes é determinada.<sup>14</sup>
- iii.Os estudantes são alocados baseado em seus anúncios e nas preferências do curso escolhido.

Etapa única: Cada curso considera seus proponentes e oferece admissão para estes um a um, seguindo sua ordem de preferência, até que tenham realizado número de ofertas igual ao de sua capacidade ou que não haja mais propostas a serem atendidas.

O algoritmo termina.

Proposição 3.1. O mecanismo de Vestibular tem as seguintes propriedades:

#### (i)não é estável.

<sup>13</sup> Uma modelagem que leva em consideração a participação de estudantes em distintos mecanismos de vestibular pode ser encontrada em Gontijo (2008).

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup>A determinação das preferências dos cursos é decorrente basicamente dos resultados de um exame denominado exame de vestibular. Algumas vezes outros fatores são considerados, tais como: raça, cor, nível de renda, etc., ou seja, em universidades que oferecem cotas ou bônus para candidatos com aquelas características.

(ii)não é Pareto eficiente.

(iii)é manipulável.

É notável que se impusermos aos jogadores uma restrição sobre o anúncio de preferências, anunciar não mais do que um único curso, os mecanismos *Deferred Acceptance* com estudantes propondo e Boston coincidem com o mecanismo do Vestibular. Discutiremos na Seção 5.2 o efeito de restrições sobre o anúncio de preferências no mecanismo *deferred acceptance* com estudantes propondo, mas já a esse ponto podemos observar que a inclusão de restrições sobre os anúncios é capaz de retirar as propriedades ótimas do mecanismo.

Apresentamos na Tabela 1 os mecanismos discutidos nessa seção apontando as propriedades atendidas por cada um destes.

Mecanismo	Estável	Eficiente	Não-manipulável
DA Estudantes	Sim	Não	Sim
DA Cursos	Sim	Não	Não
Boston	Não	Sim*	Não
Shanghai	Não	Não	Não
Top Trading Cycles	Não	Sim	Sim
Vestibular	Não	Não	Não

Tabela 1: Propriedades dos Mecanismos

Fonte: Elaboração própria.

Nota: \* Sob a hipótese de não desperdício.

#### 4 Sistema de Seleção Unificado - SISU

No Brasil, o sistema de seleção para entrada no ensino superior foi predominantemente o vestibular, desde a sua regulamentação oficial em 1911 até recentemente, onde passou a dividir esse papel com o SISU. A mudança no processo brasileiro de admissão ao ensino superior tem início em 1998 com a implantação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O exame foi criado com a finalidade de ser uma modalidade alternativa ou complementar de acesso aos cursos profissionalizantes, pós-médio e ao ensino superior.

Em 2010, é implantado o SISU que oferece às instituições de educação superior uma alternativa de realização de exame seletivo de entrada utilizando as notas do ENEM. Além disso, o SISU oferece ao sistema federal de ensino superior, e às demais instituições que aderirem a este, significativos ganhos operacionais e de custos, e busca reforçar a influência do modelo de avaliação do ENEM sobre as matrizes curriculares e práticas pedagógicas aplicadas no ensino médio. O SISU também amplia as possibilidades dos estudantes egressos do ensino médio de candidatar-se às vagas oferecidas por instituições públicas de todo o país, permitindo maior mobilidade acadêmica e maior equidade no acesso às vagas ofertadas.

#### 4.1 Descrição do SISU

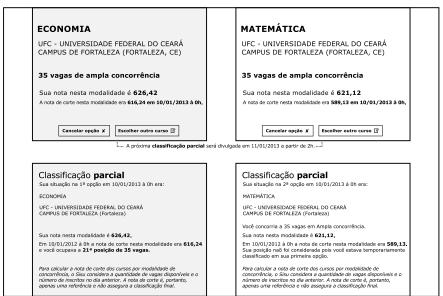
O processo seletivo divide-se em quatro etapas: Inscrição, Primeira Chamada, Segunda Chamada e Lista de Espera. A seguir descrevemos cada uma das etapas:

**Inscrição.** Somente os participantes do último ENEM podem se inscrever no SISU. O período de inscrição compreende um intervalo de cinco dias durante o qual o estudante pode a qualquer momento acessar a plataforma do sistema (usualmente no site sisu.mec.gov.br) e escolher, em ordem de preferência, até duas opções dentre as ofertadas pelas instituições participantes do processo.

Durante o período de inscrição, o estudante pode alterar quantas vezes desejar suas opções de inscrição, sendo considerada para fins de ocupação de vaga apenas a última inscrição realizada.

A partir do segundo dia, à 0h o sistema faz uso das correntes opções de cada estudante computando o *matching* que seria ofertado aos estudantes na etapa seguinte – primeira chamada – se nenhum estudante alterasse suas opções desde então. A partir das 2hs, ao acessar a plataforma do sistema, o estudante recebe informações do *matching* computado. Mediante essa simulação o estudante observa se seria, em primeira chamada, chamado a matricular-se em sua primeira opção, em sua segunda opção ou não seria chamado a matricular-se em quaisquer das duas opções, observando também, para cada uma de suas opções, sua nota, a nota do último classificado<sup>15</sup> e sua posição no ranking (ver Figura 1).

Figura 1: Representação do layout da página do SISU apresentado ao estudante durante a etapa de inscrição.



Fonte: Elaboração própria.

Além das informações ilustradas na Figura 1, o sítio do SISU disponibiliza ferramenta onde o estudante pode consultar a nota de corte de qualquer curso participante do processo de seleção. Vale observar que o sistema deixa claro ao estudante que as informações apresentadas se referem a um ponto do tempo, especificamente à 0h do atual dia, de modo que as mesmas não representam a atual situação do estudante uma vez que mudanças nas escolhas dos estudantes podem ter ocorrido desde então.

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>Esta nota é chamada "nota de corte"

**Primeira Chamada.** Ao fim do período de inscrição o sistema computa um *matching* com base na última inscrição realizada por cada estudante e, com base nesse *matching*, oferta aos estudantes vaga em, no máximo, uma de suas opções de curso, sendo que nenhum curso oferece vaga a número de estudantes maior do que sua capacidade.

Como argumentaremos na seção seguinte, o mecanismo utilizado pelo SISU para gerar o *matching* proposto aos estudantes nessa etapa é o mecanismo *deferred acceptance* com estudantes propondo.

Cada estudante que, nessa etapa, recebe oferta de vaga, decide por aceitar ou rejeitar essa oferta realizando ou não matrícula no curso ofertante da referida vaga. E, cada estudante que, nessa etapa, não recebe oferta de vaga, espera por eventuais ofertas em etapas posteriores.

**Segunda Chamada.** Cada curso que, na etapa anterior, teve  $\bar{q}_c$  vagas não ocupadas, decorrentes da não matrícula de estudantes (0  $<\bar{q}_c \le q_c$ ), realiza reoferta dessas vagas aos  $\bar{q}_c$  estudantes com maiores notas, sob as ponderações adotadas pelo curso, dentre aqueles que indicaram este como uma de suas opções e não receberam em etapa anterior oferta de vaga deste curso ou de curso anunciadamente preferível a este. Se todas as vagas do curso foram ocupadas na etapa anterior, este encerra sua participação no processo.

Novamente, cada estudante que, nessa etapa, recebe oferta de vaga, decide por aceitar ou rejeitar essa oferta realizando ou não matrícula no curso ofertante da referida vaga. E, cada estudante que, nessa etapa, não recebe oferta de vaga, espera por eventuais ofertas em etapas posteriores.

**Lista de Espera.** É facultado a todos aqueles que não tenham, até então, sido aprovados em sua primeira opção de curso a inscrição na lista de espera. Os inscritos na lista de espera concorrem exclusivamente à sua primeira opção. Deste modo, após a segunda chamada, havendo vaga em determinado curso c, todos os candidatos inscritos na lista de espera cuja primeira opção tenha sido c são ordenados segundo a ordem de preferência de c e então solicitados um a um a realizar matrícula até que não haja mais vagas em c ou não haja mais candidatos a c (todavia, como na prática o número de candidatos por curso é muito grande, essa é uma possibilidade extremamente improvável de modo que pode ser desconsiderada sem qualquer ônus).

#### 4.2 A utilização do mecanismo deferred acceptance no SISU

No regulamento do SISU consta que encerrada a fase de inscrição, os candidatos serão classificados na ordem decrescente das notas na(s) opção(ões) de vaga(s) para a(s) qual(is) se inscreveram, observado o limite de vagas disponíveis na instituição participante do SISU e a ordem das opções. Bem como, que caso o candidato possua nota para ser classificado em suas duas opções de vaga, será selecionado exclusivamente em sua primeira opção (Brasil., 2010).

Portanto, se estabelecem os seguintes critérios para o resultado da seleção: (i) O estudante é aprovado em, no máximo, uma de suas opções e, em qualquer curso não se classificam mais estudantes do que vagas ofertadas; (ii) Se o estudante não é aprovado em seu curso

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Se, seguindo esse processo, dois cursos realizem oferta a um mesmo estudante, o curso menos preferível por este estudante desfaz sua oferta, reofertando vaga ao próximo estudante de sua preferência.

de primeira opção, sua pontuação é inferior à pontuação de qualquer estudante aprovado neste curso. (iii) Se o estudante não é aprovado em seu curso de segunda opção, sua pontuação é inferior à pontuação de qualquer estudante aprovado neste curso ou o estudante foi aprovado em sua primeira opção.

O primeiro critério estabelece que o resultado da seleção é um *matching* de estudantes e cursos. Isto é, o perfil de preferências anunciadas pelos estudantes na etapa de Inscrição,  $Q = (Q_{s_1}, \ldots, Q_{s_n})$ , transforma-se através de um mecanismo de *matching*,  $\phi$ , em uma classificação de estudantes,  $\mu_1 \equiv \phi(Q)$ . Com  $\mu_1(s) \in Q_s \cup \varnothing$ , isto é, cada estudante é classificado em uma de suas opções de curso ou desclassificado (classificado em sua opção exterior).

Os demais critérios estabelecem que o mecanismo de *matching* é estável com respeito às preferências anunciadas, Q.

Por fim, consta ainda, no regulamento do SISU, que na inscrição o candidato deverá especificar de forma hierárquica até duas opções de vaga as quais deseja concorrer.

Deste modo, cada candidato concorre inicialmente apenas em sua primeira opção, passando a concorrer em sua segunda opção apenas no caso em que este não consegue vaga na primeira. O que, juntamente com os critérios anteriores, caracteriza que o mecanismo de matching utilizado na primeira chamada do Sisu é o deferred acceptance com os estudantes propondo.

Após as ofertas realizadas na primeira chamada inicia-se um processo onde, (i) cada estudante que recebe oferta de matrícula decide por aceitar ou rejeitar a oferta recebida, (ii) rejeições provocam a realização de novas propostas e (iii) propostas são aceitas temporariamente, podendo cada oferta aceita ser "trocada" por uma oferta considerada "melhor" até que ao fim do processo com o preenchimento de todas as vagas (ou até que todo curso tenha sido rejeitado por todos os estudantes considerados por estes aceitáveis) as propostas aceitas passam de temporárias para definitivas.

Todas essas são características do SISU (após a etapa de inscrição) e do algoritmo deferred acceptance com os cursos propondo. Uma diferença apresentada no SISU no entanto é que após a segunda chamada os estudantes podem deixar o processo (através da não inscrição na lista de espera) e os cursos ofertam vaga apenas a estudantes que o anunciaram como sua primeira opção. Todavia, esperamos que o mecanismo deferred acceptance com os cursos propondo possa nos fornecer uma boa aproximação.<sup>17</sup>

#### 5 Modelos estilizados do SISU

Para modelarmos o SISU, passamos agora a considerar mecanismos dinâmicos de *matching*: mecanismos de *matching* que induzem um jogo dinâmico. Agora, o processo de alocação de estudantes em cursos envolve vários períodos.

O tempo é discreto, começa em t=0 e termina em período indeterminado (porém, finito e maior ou igual a 1). Em cada período, cada curso  $c\in C$  dispõe de  $q_c$  vagas, podendo algumas ser ocupadas e outras desocupadas.

Estudantes possuem preferências estritas em relação a cursos e a opção de não es-

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>O uso do mecanismo *deferred acceptance* com os cursos propondo equivale virtualmente a considerar um mecanismo onde qualquer estudante participa de forma automática da lista de espera e que estudantes que até a lista de espera não receberam qualquer oferta de matrícula em períodos anteriores concorram, assim como em primeira e segunda chamada, às suas primeira e segunda opções.

tudar e também cursos possuem preferências estritas em relação a estudantes (individualmente) e a opção de manter uma vaga desocupada. Estudantes anunciam suas preferências em t=0, não podendo nos períodos seguintes modificar as preferências anunciadas, mas tão somente, em cada período, decidir por aceitar ou rejeitar uma oferta quando recebida ou esperar pelo próximo período quando não receber qualquer oferta.

#### 5.1 O Jogo SISU<sub>α</sub>: O SISU como um mecanismo de *matching* dinâmico

Consideraremos o jogo SISU $_{\alpha} = \langle S, \mathcal{M}, \mathcal{H}, (\Phi^t)_{t=1}^{\infty}, P_S \rangle$  onde,

- •Um conjunto  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  jogadores;
- •Um espaço  $\mathcal{M} = \{\mu \mid \mu : S \longrightarrow C \cup \{\varnothing\} \text{ \'e um } \textit{matching} \}$  de estados;
- •Um conjunto  ${\cal H}$  de sequências finitas que satisfaz as seguintes propriedades:
  - $-h^0 \equiv (v_0) \in \mathcal{M}$  é membro de  $\mathcal{H}$ , onde  $v_0$  é tal que  $v_0(s) = \emptyset$  para todo  $s \in S$ ;
  - –Se  $(\nu_0,\alpha^0,\nu_1,\ldots,\alpha^{k-1},\nu_k,\ldots,\alpha^{t-1},\nu_t)\in\mathcal{H}$  então  $(\nu_0,\alpha^0,\nu_1,\ldots,\alpha^{k-1},\nu_k)\in\mathcal{H}$ ; (Cada membro de  $\mathcal{H}$  é uma história, cada componente  $\alpha^t\equiv(\alpha_s^t)_{s\in S}$  é um perfil de ações dos jogadores no período t, com  $\alpha_s^t\in\mathcal{A}_s^t$  onde  $\mathcal{A}_s^t$  é o espaço de ações do jogador s no período t,

$$A_s^t \equiv \begin{cases} \mathcal{Q}_s & \text{se } t = 0, \\ \{\textit{espera}\} & \text{se } t > 0 \text{ e } \nu_t(s) = \varnothing, \\ \{\textit{aceita, rejeita}\} & \text{se } t > 0 \text{ e } \nu_t(s) \neq \varnothing. \end{cases}$$

onde  $\mathcal{Q}_s$  é o espaço formado pelos anúncios  $Q_s$  (lista de preferências) com não mais do que dois cursos aceitáveis. E cada componente  $\nu_t$  ( $\nu_t \in \mathcal{M}$ ) de uma história é um estado. Se  $\nu_t(s) = c$  diremos que o estudante s recebe oferta de vaga no curso c no período t e, se  $\nu_t(s) = \varnothing$  diremos que o estudante não recebe oferta no período t.) Uma história ( $\nu_0, \mathfrak{a}^0, \nu_1, \ldots, \mathfrak{a}^{t-1}, \nu_t$ ) é dita *terminal* se  $\nu_t = \nu_0$ , com t > 0. Denotamos o conjunto de histórias terminais por Z;

•Para cada período  $t=1,2,\ldots$  uma função de transição  $\Phi^t$  (um tipo de mecanismo de *matching*) que associa um par formado por uma história não-terminal e um perfil de ações a um novo estado, isto é

$$\begin{split} \Phi^t : (\mathcal{H}, A)^t &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \Phi^t(h^t, \pmb{\alpha}^t) &= \nu_{t+1} \end{split}$$

$$\text{onde } (\mathcal{H},A)^t \equiv \{(h^t,\alpha^t) \,|\, h^t = (\nu_0,\dots,\alpha^{t-1},\nu_t) \in \mathcal{H}/Z \text{ e } \alpha^t = (\alpha_s^t)_{s \in S} \text{ com } \alpha_s^t \in A_s^t\};$$

•Para cada jogador  $s \in S$ , uma relação de preferência  $P_s$  sobre Z.

O jogo:

Em t = 0:

•Nenhum estudante recebe oferta neste período.

- •Todos os estudantes escolhem simultaneamente uma ação (anúncio de preferências) e o perfil de ações é formado  $\mathfrak{a}^0 = Q_S \equiv (Q_s)_{s \in S}$  com  $Q_s \in \mathcal{Q}_s$  para todo  $s \in S$ .
- •Cada estudante recebe um *matching* temporário  $\mu_0 = \nu_0$ .
- •O matchmaker (SISU<sub>α</sub>) realiza a transição para o próximo estado. O formato da função de transição nesse período é o do mecanismo *deferred acceptance* com estudantes propondo, isto é.

$$\Phi^0(h^0, a^0) \equiv \phi_S(O_s) \equiv v_1.$$

O *matching*  $v_1$  tem as seguintes características:

- −Para todo  $s \in S$ ,  $v_1(s) = c$  somente se  $c Q_s \varnothing$ , ou seja, nenhum estudante recebe oferta de vaga em curso que não tenha sido por este (estudante) anunciado como aceitável.
- –Para todo  $c \in C$ ,  $|\nu_1^{-1}(c)| \le q_c$ , i.e., nenhum curso oferta número de vagas maior do que sua capacidade.
- –Se  $s' \notin v_1^{-1}(c)$  então  $v_1(s') Q_{s'} c$  ou para todo  $s \in v_1^{-1}(c)$  tem-se que  $s \succ_c s'$ . Mais ainda, se  $|v_1^{-1}(c)| < q_c$  então  $v_1(s') Q_{s'} c$  ou  $\varnothing \succ_c s'$ . Em palavras, se algum estudante s' anunciou o curso c como aceitável e não recebeu oferta de vaga neste ou em outro curso anunciadamente preferível ao curso c então todos os estudantes que receberam oferta de vaga de c são preferíveis (pelo curso) a s' e ainda, se alguma vaga não foi ofertada então o estudante s' não é aceitável ao curso c.

Em t > 0:

- •Cada estudante s que recebe uma oferta de vaga neste período,  $\nu_t(s) \neq \varnothing$ , decide por aceitar ou rejeitar a oferta recebida. Cada estudante que não recebe oferta neste período,  $\nu_t(s) = \varnothing$ , espera pelo próximo período.
- •Cada estudante recebe um *matching* temporário  $\mu_t$ , com

$$\mu_t(s) = \begin{cases} \nu_t(s) & \text{se } \alpha_s^t = \textit{aceita} \\ \mu_{t-1}(s) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para todo  $s \in S$ .

•Se  $\nu_t \neq \nu_0$ , o matchmaker realiza a transição para o próximo estado (ofertas do período seguinte).

$$\Phi^{t}(h^{t}, a^{t}) \equiv \nu_{t+1}$$

onde  $h^t \equiv (\nu_0, \alpha^0, \dots, \nu_t).$ 

O *matching*  $v_{t+1}$  tem as seguintes características:

−Para todo  $s \in S$ ,  $v_{t+1}(s) = c$  somente se  $c Q_s \varnothing$ , ou seja, nenhum estudante recebe oferta de vaga neste período em curso que não tenha sido por este (estudante) anunciado como aceitável.

–Para todo  $c \in C$ ,  $|\mu_t^{-1}(c)| + |\nu_{t+1}^{-1}(c)| \le q_c$ , isto é, em todo curso as vagas temporariamente ocupadas no período anterior juntamente com as ofertas do período somam número não superior à capacidade deste.

- -Se  $s' \notin \nu_{t+1}^{-1}(c)$  então  $\nu_{t+1}(s') \, Q_{s'} \, c$  ou para todo  $s \in \nu_{t+1}^{-1}(c)$  tem-se que  $s \succ_c s'$  (se  $|\mu_t^{-1}(c)| + |\nu_{t+1}^{-1}(c)| < q_c$  então  $\varnothing \succ_c s'$ ) ou ainda, existe  $k \le t$  tal que  $\nu_k(s')$  é, segundo o anúncio  $Q_{s'}$ , pelo menos tão preferível a c. Em palavras, se algum estudante s' anunciou o curso c como aceitável e não recebeu oferta de vaga deste ou em outro curso anunciadamente preferível ao curso c, neste período, então:
  - (i)todos os estudantes que receberam oferta de vaga de c neste período são preferíveis, pelo curso c, a s' (e, se alguma vaga não foi ofertada o estudante s' não é aceitável ao curso c); ou
  - (ii)ou o estudante s' recebeu em período anterior oferta pelo menos tão preferível, segundo  $Q_{s'}$ , ao curso c.
- •Se  $\nu_t=\nu_0$ , o jogo acaba e o *matching* temporário  $\mu_t$  torna-se definitivo. Denotaremos o *matching* final por  $\mu_\alpha$ .

No apêndice apresentamos na Figura 2 um fluxograma de decisão individual do jogador, no jogo  $SISU_{\alpha}$ .

Uma estratégia de um jogador em um jogo induzido por um mecanismo de *matching* dinâmico (como o  $SISU_{\alpha}$ ) é um plano que especifica uma ação a ser executada pelo jogador para toda possível história não-terminal.

**Definição 5.1.** Uma estratégia (pura) para um jogador  $s \in S$  em um jogo induzido por um mecanismo de matching dinâmico  $\left\langle S, \mathcal{M}, \mathcal{H}, (\Phi^t)_{t=1}^\infty, P_S \right\rangle$  é uma função que designa para cada história não-terminal  $h^t = (\nu_0, \mathfrak{a}^0, \dots, \nu_t) \in \mathcal{H} \setminus Z$  uma ação  $\mathfrak{a}_s^t \in A_s^t$ .

#### 5.2 O mecanismo deferred acceptance com restrição de anúncio de preferências

Na Seção 4.2 argumentamos que o mecanismo utilizado no SISU faz uso do mecanismo deferred acceptance com os estudantes propondo para gerar o matching proposto em primeira chamada, no entanto existe uma restrição sobre o anúncio das preferências. Tal restrição não consta na proposta original do referido mecanismo de matching em Gale and Shapley (1962), no entanto é prática comum (Denver e Nova Iorque nos Estados Unidos, e Manchester e Newcastle na Inglaterra são exemplos de cidades que realizam processos de admissão escolar utilizando o mecanismo deferred acceptance com os estudantes propondo sob restrições, i.e., limitando o número máximo de instituições anunciadas). Existem sérias implicações decorrentes de tais restrições, uma delas é que a desejada propriedade de não manipulabilidade do mecanismo deferred acceptance com os estudantes propondo é perdida e, consequentemente, a estabilidade do matching resultante (ver, por exemplo, Haeringer and Klijn (2008) ou Pathak and Sönmez (2013)).

Haeringer and Klijn (2008), além de ressaltar a manipulabilidade do mecanismo *deferred acceptance* com os estudantes propondo quando há restrições de anúncio de preferências, apontam que não existem estratégias (fracamente) dominantes no mesmo e destacam um conjunto de estratégias não dominadas descritas a seguir.

**Proposição 5.1** (Haeringer and Klijn, 2008). *Para o mecanismo* deferred acceptance *com os estudantes propondo sob restrições de anúncio de, no máximo,* k *opções de cursos,* 

- (i)Se um estudante tem no máximo k cursos aceitáveis, então ele não pode ter resultado melhor do que anunciando suas verdadeiras preferências;
- (ii) Se um estudante tem mais de k cursos aceitáveis, ele não pode fazer melhor do que empregar uma estratégia de anunciar k cursos aceitáveis, ranqueando-os em sua verdadeira ordem de preferências.

Assim, se as verdadeiras preferências do estudante são  $P_s=c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6$  e a este é permitido o anúncio de três cursos, o anúncio  $Q_s=c_2,c_4,c_5$  domina (fracamente) qualquer anúncio distinto que contenha (apenas) os mesmos cursos, por exemplo,  $Q_s'=c_5,c_2,c_4$ . Como ressalta Haeringer and Klijn (2008), a mensagem é que um estudante não perde (podendo inclusive ganhar) por submeter o mesmo conjunto de cursos em sua verdadeira ordem de preferência.

Deste modo, é de se esperar que no SISU as opções anunciadas pelos estudantes não são necessariamente as suas mais preferidas, mas que de fato o estudante prefere a sua primeira opção anunciada à segunda. Diremos então que um anúncio é *compatível às preferências do estudante* se, e somente se, este anuncia somente cursos aceitáveis e em maior número possível, ranqueando-os em sua verdadeira ordem de preferências. Ainda, um mecanismo de *matching* será dito um *mecanismo compatível às preferências dos estudantes* se para cada estudante é estratégia não dominada realizar um anúncio compatível às suas preferências.

Deste modo, no SISU, qualquer estudante para o qual apenas um curso é desejável fará um anúncio compatível com suas preferências se anunciar somente o curso que lhe é desejável como primeira opção (não anunciando qualquer curso como de sua segunda opção) e qualquer estudante para o qual mais do que um curso lhe é desejável fará um anúncio compatível com suas preferências se anunciar dois cursos desejáveis de modo que o curso anunciado como primeira opção é verdadeiramente preferível ao curso anunciado como segunda opção.

Dadas as características do  $SISU_{\alpha}$  observamos que o maior interesse é a compreensão do comportamento estratégico dos estudantes que, em primeira chamada, recebem oferta de vaga em sua segunda opção de curso.

De fato, estudantes que não recebem qualquer oferta nessa etapa só podem esperar. Enquanto que estudantes que recebem oferta de sua primeira opção devem optar por aceitar a oferta sendo alocado em definitivo nesse curso ou rejeitá-la e obter sua opção externa. E, uma vez que é razoável assumir que o anúncio do estudante seja composto de cursos verdadeiramente aceitáveis (ou seja, aceitáveis segundo suas verdadeiras preferências) então a estratégia  $a_s^1=aceita$  é dominante para este estudante.

Na subseção seguinte analisamos um jogo derivado do jogo  $SISU_{\alpha}$ , nomeado  $SISU_{\beta}$ , que tem por propósito permitir a exploração da possibilidade de que, agindo racionalmente, algum estudante que, em primeira chamada, recebe oferta de sua segunda opção opte por rejeitá-la. 18

 $<sup>^{18}</sup>$ Observe que se nenhum estudante rejeita a oferta recebida em primeira chamada o jogo SISU $_{\alpha}$  chega ao fim.

#### 5.3 O Jogo SISU $_{\beta}$

Consideraremos um jogo como o SISU $_{\alpha}$  exceto pelo fato de que o espaço de ações dos jogadores nos períodos t>1 sofre uma restrição e agora passamos a ter

$$A_s^t \equiv \begin{cases} \mathcal{Q}_s & \text{se } t = 0, \\ \{ \textit{espera} \} & \text{se } t > 0 \text{ e } \nu_t(s) = \varnothing, \\ \{ \textit{aceita, rejeita} \} & \text{se } t = 1 \text{ e } \nu_1(s) \neq \varnothing, \\ \{ \textit{aceita} \} & \text{se } t > 1 \text{ e } \nu_t(s) \neq \varnothing. \end{cases}$$

Ou seja, consideramos que para os períodos t>1 as ofertas de *matching* sejam impostas, uma vez que toda oferta deve necessariamente ser aceita, limitando o "problema estratégico" do estudante ao período t=1 pois somente se t=1 e  $\nu_1(s)\neq\varnothing$  o jogador possui conjunto de possibilidades de ação não unitário. Isto nos possibilita escrever o jogo em apenas dois períodos.

O jogo:

Em t = 0:

- •Todos os estudantes escolhem simultaneamente uma ação (anúncio de preferências) e o perfil de ações é formado  $\mathfrak{a}^0=Q_S\equiv (Q_s)_{s\in S}$  com  $Q_s\in \mathcal{Q}_s$  para todo  $s\in S$ .
- •O matchmaker (SISU $_{\beta}$ ) realiza a transição para o próximo estado. O formato da função de transição nesse período é o do mecanismo *deferred acceptance* com estudantes propondo, isto é.

$$\Phi^0(h^0,\alpha^0) \equiv \phi_S(Qs) \equiv \nu_1.$$

Em t = 1:

- •Cada estudante s que recebe uma oferta de vaga neste período,  $\nu_1(s) \neq \varnothing$ , decide se aceita ou rejeita a oferta recebida. Cada estudante que não recebe oferta neste período,  $\nu_t(s) = \varnothing$ , espera pelo *matching* final.
- •O matching final é determinado por uma função de transição  $\Phi^1$ .

Observando que o processo empregado pelo  $SISU_{\alpha}$ , quando da aceitação das vagas por todos os estudantes, equivale ao algoritmo *deferred acceptance* com cursos propondo podemos escrever

$$\Phi^1(h^1,\alpha^1) \equiv \phi(\tilde{Q}_S) \equiv \mu_\beta$$

onde  $\phi_C$  é o mecanismo de *matching deferred acceptance* com cursos propondo e  $\tilde{Q}_S$  representa um perfil de preferências anunciadas para os jogadores baseado nos perfis de ações  $\mathfrak{a}^0$  e  $\mathfrak{a}^1$ 

$$\tilde{Q}_S = (Q_s)_{s \in S} \qquad \text{com} \qquad \tilde{Q}_s = \begin{cases} Q_s & \text{se } \alpha_s^1 = \textit{espera} \\ Q_s\big|_{\succeq \nu_1(s)} & \text{se } \alpha_s^1 = \textit{aceita} \\ Q_s\big|_{\succ \nu_1(s)} & \text{se } \alpha_s^1 = \textit{rejeita} \end{cases}$$

onde

$$Q_s\big|_{\succ\nu_1(s)} = \{Q_s \in \mathcal{Q}_s \mid \, \forall \, c,c' \in C, \, c \, Q_s \, c' \Rightarrow c \, Q_s \, c' \, \text{e} \, c \, Q_s \, \varnothing \Leftrightarrow c \, Q_s \, \nu_1(s)\}$$

е

$$Q_s\big|_{\succ\nu_1(s)} = \{Q_s \in \mathcal{Q}_s \,|\,\,\forall\, c,c' \in C,\ c\,Q_s\,c' \Rightarrow c\,Q_s\,c' \;\textbf{e} \varnothing\,Q_s\,c \Leftrightarrow \nu_1(s)\,Q_s\,c\}.$$

Denotaremos o *matching* final por  $\mu_{\beta}$ .

No apêndice apresentamos na Figura 3 um fluxograma de decisão individual do jogador, no jogo  $SISU_{\beta}$ .

#### 5.4 Resultados

Dada a análise anterior, apresentamos a seguir algumas proposições em relação ao SISU $_{\beta}$ , concluindo com uma proposição acerca do SISU $_{\alpha}$ . Os detalhes das provas encontram-se no Apêndice.

**Proposição 5.2.** No SISU<sub> $\beta$ </sub>, nenhum curso está melhor em  $\mu_{\beta}$  do que em  $\nu_{1}$ .

Em palavras, todo curso que recebe recusa de matrícula por algum estudante é prejudicado, sendo levado a um *matching* de menor desejabilidade. Dessa forma, é do interesse dos cursos que o *matching* de primeira chamada seja implementado, isto é, que todos os estudantes que recebam oferta de vaga realizem matrícula.

O *matching* proposto em primeira chamada é estável com relação às preferências anunciadas. Entretanto, se esse *matching* é rejeitado por algum estudante, instabilidade é introduzida. A Proposição 5.3 declara que o mecanismo SISU $_{\beta}$  através do *matching* final, de certa forma, reestabelece a estabilidade perdida. O *matching* final pode ser considerado estável se avaliarmos não somente com base nas preferências anunciadas, mas também levando em consideração as ações de recusa de matrícula dos estudantes.

**Proposição 5.3.** No SISU<sub> $\beta$ </sub>, o matching  $\mu_{\beta}$  é estável com relação a  $\tilde{Q}_{s}$ .

A Proposição 5.4 declara que nenhuma coalizão de estudantes é capaz de, através da rejeição de matrícula no curso que lhe é proposto pelo *matching* de primeira chamada, (i) prejudicar estudantes não integrantes dessa coalizão, e (ii) não prejudicar algum de seus membros.

**Proposição 5.4.** No SISU $_{\beta}$ , seja  $\bar{S}=\{s\in S\,|\, \nu_1(s)\neq\varnothing\ \ e\ \alpha_s^1=\text{rejeita}\}$  então:

(i)Para todo  $s \in S \setminus \bar{S}$ ,  $\mu_{\beta}(s)$  é, segundo o anúncio  $Q_s$ , pelo menos tão preferível quanto  $\nu_1(s)$ .

(ii) Se  $\bar{S}$  é não vazio, existe  $s' \in \bar{S}$  para o qual  $\nu_1(s')$  é, segundo o anúncio  $Q_{s'}$ , preferível a  $\nu_1(s')$ . Portanto,  $\mu_{\bar{B}}(s') = \varnothing$ .

Daí, no jogo SISU $_{\beta}$  teremos  $\mu_{\beta}=\nu_{1}$  e, portanto, a estratégia adotada em  $h^{0}=(\nu_{0})$ , no SISU $_{\beta}$ , deve ser a mesma utilizada no *deferred acceptance* sob restrição de anúncio de, no máximo, duas opções de curso. O que, segundo Teorema 5.1, constitui-se de anúncios compatíveis com as preferências dos estudantes.

A proposição a seguir apresenta um perfil de estratégias não dominadas no jogo induzido pelo mecanismo  $SISU_{\alpha}$ .

**Proposição 5.5.** No SISU $_{\alpha}$ , o perfil de estratégias  $\xi = (\xi_s)_{s \in S}$  onde

$$\xi_s(h^0) \in \{Q_s \in \mathcal{Q}_s \,|\, Q_s \text{ \'e compativel com } P_s\}$$

е

$$\xi_s(h^t) = \begin{cases} \text{aceita} & \textit{se } \nu_t(s) \neq \varnothing \\ \text{espera} & \textit{se } \nu_t(s) = \varnothing \end{cases} \qquad \forall \, h^t \in \mathcal{H} \setminus \textbf{Z}, \textit{com } h^t \neq h^0$$

é tal que para todo estudante  $s \in S$ ,  $\xi_s$  é uma estratégia não-dominada e  $\xi$  constitui um equilíbrio no subjogo onde  $h^0 = (v_1)$ .

#### 5.5 Propriedades do SISU<sub>α</sub> vis-a-vis Vestibular

Na seção 2 fizemos uma análise de variados mecanismos observando suas características quanto a não manipulabilidade, Pareto eficiência e estabilidade. No entanto, a introdução de restrições sobre o anúncio das preferências a qualquer destes tem impactos sobre suas propriedades usuais, o que levanta a seguinte questão: sendo o mecanismo SISU (mecanismo deferred acceptance sob restrições de anúncio a listas de preferências com, no máximo, dois cursos) manipulável, o que o tornaria mais desejável do que, por exemplo, o mecanismo de vestibular (o qual pode ser visto como um mecanismo deferred acceptance sob restrições de anúncio a listas de preferências com, no máximo, um curso)?

Pathak and Sönmez (2013) propõem uma comparação da manipulabilidade de mecanismos com a seguinte definição: Um mecanismo  $\psi$  é *pelo menos tão manipulável quanto* um mecanismo  $\phi$  se todo problema de *school choice* que é vulnerável à manipulação sob  $\phi$  é também vulnerável à manipulação sob  $\psi$ , e este é *mais manipulável* se, em adição, existe pelo menos um problema de *school choice* que é vulnerável à manipulação sob  $\psi$  mas não sob  $\phi$ .

Com base nessa medida de manipulabilidade apresentam o seguinte resultado

**Proposição 5.6** (Pathak and Sönmez, 2013). Seja l > k > 0 e suponha que existem pelo menos l cursos. Então o mecanismo deferred acceptance com possibilidade de anúncio de k opções de cursos é mais manipulável que o mecanismo deferred acceptance com possibilidade de anúncio de l opções de cursos.

O que nos permite concluir que o mecanismo  $SISU_{\alpha}$  produz matchings menos manipuláveis do que o mecanismo do vestibular e conjecturar que permitir anúncio de maior número de cursos leve a um mecanismo ainda menos manipulável.

Ainda, Chen and Kesten (2011) definem, de maneira análoga, uma medida de graus de estabilidade e eficiência (no sentido de Pareto). Um mecanismo  $\psi$  é *pelo menos tão estável quanto* (*pelo menos tão eficiente quanto*) um mecanismo  $\phi$  se todo problema de *school choice* que é estável (eficiente) sob  $\phi$  é também estável (eficiente) sob  $\psi$ , e este é *mais estável* (*mais eficiente*) se, em adição, existe pelo menos um problema de *school choice* que é estável (eficiente) sob  $\psi$  mas não sob  $\phi$ .

Nesse sentido, seria o mecanismo SISU $_{\alpha}$  mais estável ou eficiente que o mecanismo do vestibular? Embora não tenhamos resposta a essa pergunta, somos levados a crer que o SISU $_{\alpha}$  produza sim *matchings* tanto mais estáveis quanto mais eficientes do que o vestibular.

#### 6 Considerações Finais

O objetivo desse trabalho foi fornecer uma análise, no âmbito da teoria dos jogos, do recentemente implantado mecanismo brasileiro de acesso universitário, o Sistema de Seleção Unificada (SISU).

Desde sua implantação, o SISU vem apresentando uma crescente participação tanto de estudantes que buscam acesso ao ensino superior via este, quanto cursos, que passam a utilizá-lo no lugar do tradicional vestibular. Diante desses fatos faz-se essencial o melhor entendimento das "qualidades" da alocação gerada pelo SISU. No entanto, o SISU tem sido um tema ausente na literatura econômica brasileira. Dessa forma, este trabalho vem preencher esta lacuna, esperando fomentar outras pesquisas acerca do tema, bem como contribuir através da inclusão de uma perspectiva econômica à discussão já existente acerca do SISU em outros campos do conhecimento.

Alicerçados na teoria introduzida por Gale and Shapley (1962) iniciamos o trabalho de descrição do SISU como um mecanismo de *matching*. As características do SISU levou-nos a desenvolver o trabalho dentro de um contexto de *school choice*. Nesse contexto, a teoria descreve um mecanismo de *matching* como um processo que, partindo de preferências anunciadas pelos estudantes e das verdadeiras preferências dos cursos, gera um *matching* entre os mesmos. <sup>19</sup> Todavia, o SISU se desenvolve em diversas etapas, ou seja, o sistema possui aspectos sequenciais (ou dinâmicos). Na primeira etapa, preferências são anunciadas e um mecanismo é utilizado para gerar um *matching* entre estudantes e cursos. Na segunda etapa, estudantes são solicitados a anunciar a aceitação ou não do *matching* através da realização ou não de sua matrícula no curso que lhe é proposto pelo sistema. Ao fim desta etapa, tendo ocorrido sobra de vagas em algum curso (vagas desocupadas decorrente da não realização de matrícula por alguns estudantes) o SISU utiliza-se de um novo mecanismo, que considera não somente as preferências anunciadas pelos estudantes mas também sua ação, caso tenha sido solicitado a matricular-se no período anterior, para gerar nova proposta de *matching* e esse processo continua até que todas as vagas sejam preenchidas.

Deste modo, passamos a descrever o SISU como um mecanismo de *matching* dinâmico (um conceito mais amplo de mecanismos de *matching*, ver por exemplo Pereyra (2013)). E, muito embora, não tenhamos avançado muito em nossa exploração, esta foi capaz de nos fornecer valiosos *insights* e despertar nossa atenção para questões cruciais sobre o funcionamento do SISU.

Por exemplo, é notório que grande parte das matrículas ofertadas na primeira chamada do SISU são rejeitadas, gerando a necessidade da realização de novas propostas de *matching*.<sup>20</sup> Isto prolonga o tempo demandado pelo processo de seleção aumentando os custos de participação para os estudantes e, principalmente, para as instituições de ensino superior.

Os resultados encontrados apontam para o fato de que (i) fatores externos ao mecanismo do SISU possam ser os únicos responsáveis pelo alto índice de não matrícula em primeira chamada e que (ii) o mecanismo do SISU é menos manipulável que o mecanismo do vestibu-

 $<sup>^{19} \</sup>text{Formalmente, um } \textit{matching} \text{ pode ser visto como uma função } \mu: S \longrightarrow C \cup \{\varnothing\} \text{ satisfazendo } |\mu^{-1}(c)| \leq q_c \text{ para todo } c \in C.$ 

<sup>&</sup>lt;sup>20</sup>Ver, por exemplo, Cieglinski (2012) ou Universidade Federal do Ceará. (2013).

lar. Apesar dos resultados encontrados parecerem promissores é importante salientar algumas omissões:

- a)A não modelagem do SISU em exato, mas tão somente de um mecanismo similar impede a constatação de que, de fato, no SISU nenhum jogador possa usufruir de vantagens ao adotar a estratégia na qual recusa matricular-se em sua segunda opção de curso;
- b)Em nossa comparação do mecanismo do SISU em relação ao mecanismo do vestibular não conseguimos avaliar se algum desses é, segundo Chen and Kesten (2011), mais estável ou mais eficiente de Pareto;
- c)O trabalho não considera o possível comportamento estratégico dos cursos via a escolha de suas capacidades e ou na decisão de realizar sua seleção via vestibular ou via SISU (Considerações do possível comportamento estratégico dos cursos via capacidades são feitas em Sönmez (1997) e, mais recentemente, em Kesten (2012) no contexto de school choice).

Por fim, sugerimos para trabalhos futuros a modelagem computacional do mecanismo do SISU bem como a análise qualitativa dos *matchings* resultantes deste para os casos em que outros mecanismos que não o *deferred acceptance* são utilizados para a geração do *matching* proposto em primeira chamada.

#### Referências

ABDULKADIROĞLU, A.; SÖNMEZ, T. School Choice: A Mechanism Design Approach. **The American Economic Review**, v. 93, n. 3, p. 729 - 747. 2003a.

\_\_\_\_\_ School Choice: A Mechanism Design Approach. Department of Economics, Columbia University. Working Paper n. 0203-18. 2003b. Disponível em: <a href="http://hdl.handle.net/10022/AC:P:508">http://hdl.handle.net/10022/AC:P:508</a>. Acesso em: 13 set. 2012.

ARROW, K. J. Higher Education as a Filter. **Journal of Public Economics**, v. 2, n. 3, p. 193 - 216. 1973.

BALINSKI, M.; SÖNMEZ, T. A Tale of Two Mechanisms: Student Placement. **Journal of Economic Theory**, v. 84, p. 73 - 94. 1999.

BOSTON PUBLIC SCHOOLS. **A Brief History of BPS Student Assignment**. 2012. Disponível em: <a href="http://www.bostonpublicschools.org/files/studentassignfacts\_rev\_12-0306\_0.pdf">http://www.bostonpublicschools.org/files/studentassignfacts\_rev\_12-0306\_0.pdf</a>>. Acesso em: 02 out. 2012.

BRASIL. Portaria normativa MEC nº 13, de 17 de maio de 2010. Altera a Portaria Normativa MEC nº 2, de 26 de janeiro de 2010, que institui e regulamenta o Sistema de Seleção Unificada - SiSU. **Diário Oficial da União**. Ministério da Educação. Brasília, DF, 18 mai. 2010. Disponível em: <a href="http://www.in.gov.br/imprensa/visualiza/index.jsp?jornal=1">http://www.in.gov.br/imprensa/visualiza/index.jsp?jornal=1</a> &pagina=9&data=18/05/2010>. Acesso em: 10 set. 2012.

CHEN, Y.; KESTEN, O. From Boston to Shanghai to Deferred Acceptance: Theory and Experiments on A Family of School Choice Mechanisms. Working Paper. 2011. Disponível em: <a href="http://yanchen.people.si.umich.edu/papers/mod\_boston\_20110131.pdf">http://yanchen.people.si.umich.edu/papers/mod\_boston\_20110131.pdf</a>>. Acesso em: 29 out. 2012.

CIEGLINSKI, A. Mais da metade das vagas do SiSU sobram na primeira chamada. 2012. **Agência Brasil**. Disponível em: <a href="http://agenciabrasil.ebc.com.br/noticia/2012-01-26/mais-da-metadedas-vagas-do-sisu-sobram-na-primeira-chamada">http://agenciabrasil.ebc.com.br/noticia/2012-01-26/mais-da-metadedas-vagas-do-sisu-sobram-na-primeira-chamada</a>. Acesso em: 27 mar. 2013.

DUBINS, L. E.; FREEDMAN, D. A. Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm. **The American Mathematical Monthly**, v. 88, n. 7, p. 485 - 494. 1981.

GALE, D.; SHAPLEY, L. S. College Admissions and the Stability of Marriage. **The American Mathematical Monthly**, v. 69, n. 1, p. 9 - 15. 1962.

GONTIJO, M. F. **Uma Aplicação da Teoria dos Jogos ao Mercado do Vestibular Brasileiro.** 2008. Dissertação (Mestrado em Economia) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

HAERINGER, G.; KLIJN, F. **Constrained School Choice**. Barcelona GSE Working Paper n. 294. 2008. Disponível em: <a href="http://research.barcelonagse.eu/tmp/working\_papers/294(revised).pdf">http://research.barcelonagse.eu/tmp/working\_papers/294(revised).pdf</a>>. Acesso em: 4 dez. 2012.

University Worldwide. HELMS, R. M. Admission Education Working Pa-Series n. 15. Washington, DC: World Bank. 2008. Disponível per em: <a href="http://documents.worldbank.org/curated/en/2008/07/9799885/university-admission-">http://documents.worldbank.org/curated/en/2008/07/9799885/university-admission-</a> worldwide>. Acesso em: 26 nov. 2012.

HYLLAND, A.; ZECKHAUSER, R. The Efficient Allocation of Individuals to Positions. **Journal of Political Economy**, v. 87, n. 2, p. 293 - 314. 1979.

KELSO JR., A. S.; CRAWFORD, V. P. Job Matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes. **Econometrica**, v. 50, n. 6, p. 1483 - 1504. 1982.

KESTEN, O. On Two Kinds of Manipulation for School Choice Problems. **Economic Theory**, v. 51, p. 677 - 693. 2012.

PATHAK, P. A.; SÖNMEZ, T. School Admissions Reform in Chicago and England: Comparing Mechanisms by Their Vulnerability to Manipulation. **American Economic Review**, v. 103, n. 1, p. 80 - 106. 2013.

PEREYRA, J. S. A Dynamic School Choice Model. **Games and Economic Behavior**, v. 80, p. 100 - 114, 2013.

ROTH, A. E. The Economics of Matching: Stability and Incentives. **Mathematics of Operations Research**, v. 7, n. 4, p. 617 - 628. 1982.

Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open Questions. NBER Working Paper n. 13225. 2007. Disponível em: <a href="http://www.nber.org/papers/w13225.pdf">http://www.nber.org/papers/w13225.pdf</a>>. Acesso em: 3 out. 2012.

ROTH, A. E.; SÖNMEZ, T.; ÜNVER, M. U. Kidney Exchange. **The Quartely Jornal of Economics**, v. 119, n. 3, p. 457 - 488. 2004.

ROTH, A. E.; SOTOMAYOR, M. 1990 **Two-Sided Matching: A Study on Game-Theoretic Modeling and Analysis**, Econometric Society Monographs. Cambridge University Press.

SHAPLEY, L.; SCARF, H. On Cores and Indivisibility. **Journal of Mathematical Economics**, v. 1, p. 23-28. 1974.

SÖNMEZ, T. Manipulation via Capacities in Two-Sided Matching Markets. **Journal of Economic Theory**, v. 77, n. 1, p. 197 - 204. 1997.

2012. Disponivel em: <a href="https://www2.bc.edu/~sonmezt">https://www2.bc.edu/~sonmezt</a>. Acesso em: 22 nov. 2012.

SÖNMEZ, T.; ÜNVER, M. U. Matching, Allocation, and Exchange of Discrete Resources. *In*: **Handbook of Social Economics**, North-Holland, 2011. vol. 1A, p. 781 - 852.

SPENCE, M. Job Market Signaling. **The Quartely Jornal of Economics**, v. 87, n. 3, p. 355 - 374. 1973.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ. UFC preenche 58% das vagas na primeira chamada do SiSU 2013. Fortaleza, 2013. Disponível em: <a href="http://www.ufc.br/noticias/noticias-de-2013/3242-ufc-preenche-58-das-vagas-na-primeira-chamada-do-sisu-2013">http://www.ufc.br/noticias/noticias-de-2013/3242-ufc-preenche-58-das-vagas-na-primeira-chamada-do-sisu-2013</a>. Acesso em: 28 jan. 2013.

#### **Apêndice**

#### **Demonstrações**

Os teoremas a seguir são utilizados na demonstração do item (ii) da Proposição 5.4.

**Teorema 1** (Gale and Shapley, 1962). Quando estudantes e cursos têm preferências estritas, sempre existe um matching estável estudante-ótimo (o qual é pelo menos tão preferível quanto qualquer outro matching estável por todos os estudantes). Mais ainda, o matching  $\mu_S$  produzido pelo algoritmo deferred acceptance com estudantes propondo é o matching estável estudante ótimo.

**Teorema 2** (Dubins and Freedman, 1981). Seja  $P_S = (P_{s_1}, P_{s_2}, \dots, P_{s_n})$  as verdadeiras preferências dos estudantes, e seja  $\bar{P}_S$  preferências que difiram de  $P_S$  em alguma coalizão de estudantes  $\bar{S} \subseteq S$  que anunciam falsamente suas preferências. Então, não existe matching estável  $\mu$ , com respeito a  $\bar{P}_S$ , o qual é preferível a  $\mu_S$  por todos os membros de  $\bar{S}$ .

**Demonstração da Proposição 5.2.** Como  $v_1$  é estável com relação a  $Q_s$  então para cada curso c temos que se um estudante  $s \notin v_1^{-1}(c)$  e  $s \succ_c s'$  para algum  $s' \in v_1^{-1}(c)$  então  $v_1(s)$   $Q_s$  c.

Em palavras, se  $\nu_1$  não aloca s em c e o curso c prefere o estudante s a algum outro estudante que lhe é alocado por  $\nu_1$ , então o estudante s, segundo o anúncio  $Q_s$ , prefere  $\nu_1(s)$  a c.

Logo, como  $\mu_{\beta}(s)$  é pelo menos tão preferível, segundo  $Q_s$ , a  $\nu_1(s)$  que por sua vez é estritamente preferível, segundo  $Q_s$  ao curso c, o *matching*  $\mu_{\beta}$  não aloca no curso c nenhum estudante preferível a qualquer dos estudantes que lhe são alocados por  $\nu_1$ . Donde segue o resultado.

**Demonstração da Proposição 5.3.** Segue imediatamente do fato de que  $\mu_{\beta}$  é o *matching* curso ótimo derivado de  $\tilde{Q}_s$ .

#### Demonstração da Proposição 5.4.

(i)Se  $\nu_1(s)=\varnothing$ , uma vez que  $\mu_\beta$  é estável com relação a  $\tilde{Q}_s$ ,  $\mu_\beta$  é individualmente racional com relação a  $\tilde{Q}_s$ . Daí,  $\mu_\beta$  também é individualmente racional com relação a  $Q_s$ .

Resta-nos mostrar que se  $\nu_1(s)=c\in C$  então  $\mu_\beta(s)\neq\varnothing$ . Pois daí, por definição de  $Q_s$ ,  $\mu_\beta(s)$  é pelo menos tão preferível quanto  $\nu_1(s)$ , segundo  $Q_s$ .

Afirmação 1. Se  $|\mu_{\beta}^{-1}(c)| < q_c$  então  $\mu_{\beta}(s) \neq \varnothing.$ 

Demonstração da Afirmação 1.Como  $\nu_1(s)=c$ , temos que  $s\succ_c\varnothing$ . Logo, todo matching  $\mu$  tal que  $|\mu^{-1}(c)|< q_c$  e  $c\ Q_s\varnothing=\mu(s)$  é bloqueado por (s,c). E, uma vez que  $\mu_\beta$  é estável, o resultado segue.

*Afirmação* 2. Se  $\mu_{\beta}(s) \neq c$  então  $\mu_{\beta}(s) \neq \emptyset$ .

Demonstração da Afirmação 2.Suponhamos com propósito de absurdo que  $\mu_{\beta}(s)=\varnothing$ . Da Afirmação 1 segue que  $|\mu_{\beta}^{-1}(c)|=q_c$  e como  $\nu_1(s)=c$ , existe algum estudante alocado em c pelo matching  $\mu_{\beta}$  que não estava alocado em c pelo matching  $\nu_1$  e, portanto  $\mu_{\beta}(s')=c\ Q_{s'}\ \nu_1(s')$  pois  $\tilde{Q}_{s'}$  não contém nenhum curso menos preferível a  $\nu_1(s')$ . E, uma vez que  $\mu_{\beta}$  é estável, com relação a  $\tilde{Q}_s$ , devemos ter  $s'\succ_c s$  pois de outro modo  $\mu_{\beta}$  seria bloqueado por (s,c). Mas, então, (s',c) bloqueia  $\nu_1$ , contrariando o fato de que  $\nu_1$  é estável segundo  $Q_s$ . Logo, devemos ter  $\mu_{\beta}(s)\neq\varnothing$ .

Da Afirmação 2 segue que em todo caso  $\mu_{\beta}(s) \neq \varnothing$ .

(ii)Do Teorema 2, temos que no mecanismo *deferred acceptance* com os estudantes propondo a estratégia de anunciar as verdadeiras preferências faz parte do core do jogo. Então, segundo o anúncio  $Q_S$  (isto é, considerando  $Q_S$  as verdadeiras preferências dos jogadores) teremos que para qualquer coalizão  $\bar{S}$  de estudantes que rejeitem a proposta de matrícula recebida em primeira chamada, pelo menos um dos membros avaliará  $\phi_S(Q_S)$  como pelo menos tão preferível quanto  $\phi_S(\tilde{Q}_S)$ .

Mas como se o estudante  $s'\in \bar{S}$  rejeita a oferta de vaga recebida por  $\phi_S(Q_S)\equiv \nu_1$ , nas etapas posteriores só pode receber oferta melhor do que a recebida por  $\nu_1$  ou então  $\varnothing$ , devemos ter  $\phi_S(\tilde{Q}_S)=\varnothing$ .

Ainda, o Teorema 1 anuncia que  $\phi_S(\tilde{Q}_S)$  é pelo menos tão preferível a  $\phi_C(\tilde{Q}_S)$  segundo  $\tilde{Q}_S$ , o que implica que também  $\phi_C(\tilde{Q}_S) = \varnothing$ , pois o estudante não pode receber oferta senão daqueles cursos os quais anunciou como uma de suas opções. Concluindo a demonstração.

**Demonstração da Proposição 5.5.** Basta notar que sob esse perfil de estratégias os jogos  $SISU_{\alpha}$  e  $SISU_{\beta}$  equivalem-se. Daí, o resultado segue das Proposições 5.1 e 5.4.

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup>O core de um problema de *school choice* é o conjunto de *matchings* não dominados por qualquer outro *matching*.

#### Diagramas

Figura 2: Fluxograma de decisão individual do  $SISU_{\alpha}$ .

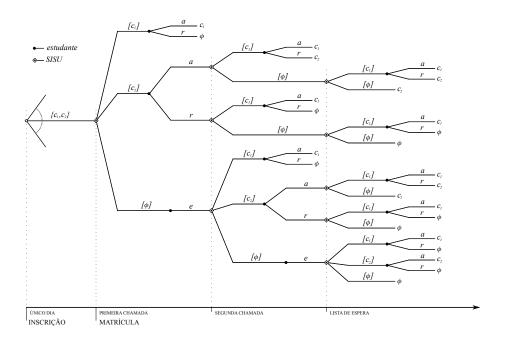
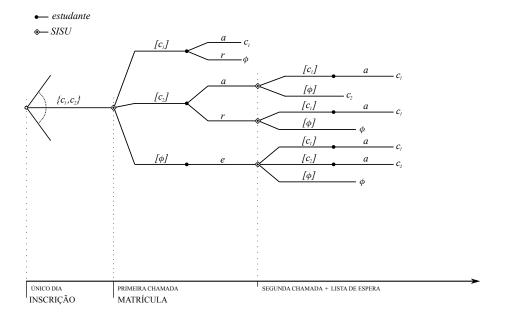


Figura 3: Fluxograma de decisão individual do SISU $_{\beta}$ .



No Brasil, a busca pela redução das ineficiências observadas na alocação de vagas em instituições de ensino superior via o tradicional vestibular levou à formulação e implantação de um mecanismo alternativo de seleção para admissão superior: o Sistema de Seleção Unificada (SISU), criado em 2010. O mecanismo é um algoritmo de matching com as seguintes características: (i) cada estudante que recebe oferta de matrícula decide por aceitar ou rejeitar a oferta recebida; (ii) rejeições de ofertas provocam a realização de novas propostas; e (iii) propostas são aceitas temporariamente, podendo cada oferta aceita ser "trocada" por uma oferta considerada "melhor". Ou seja, o SISU é um mecanismo semelhante ao Algoritmo Deferred Acceptance (Algoritmo Gale-Shapley) com os cursos propondo. Apesar da importância do SISU, a literatura econômica sobre suas especificidades é praticamente inexistente. Neste trabalho busca-se entender e caracterizar os incentivos propiciados pelo SISU através de dois novos mecanismos teóricos desenvolvidos, o SISU $\alpha$  e o SISU $_{\beta}$ . Ambos são modelados como mecanismos de matching dinâmicos. Caracterizamos estratégias não dominadas para o SISU $_{\beta}$  e o SISU $_{\alpha}$ . Utilizando o SISU $_{\alpha}$  como a melhor aproximação disponível para o SISU, concluímos que a introdução do SISU apresentou um importante avanço em relação ao vestibular em termos de ganhos de eficiência do matching entre alunos e cursos.